

Memorator de formule — matematică, gimnaziu

Toată teoria și toate formulele de la clasa a V-a la a VIII-a

1. Numere

Mulțimi

$\in$ aparține $\notin$ nu aparține $\subset$ inclusă $\supset$ include
 $\emptyset$ — mulțimea vidă (nu are niciun element)

Cardinalul $|A|$ = câte elemente are mulțimea A .

Mulțimi **disjuncte** = nu au niciun element comun.

Reuniunea $A \cup B$ = elementele din A sau din B .

Intersecția $A \cap B$ = elementele din A și din B .

Diferența $A \setminus B$ = elementele din A care nu sunt în B .

Produsul cartezian $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi.

Mulțimile de numere

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ naturale; $\mathbb{N}^*$ — fără 0
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ întregi
- $\mathbb{Q}$ — raționale: se scriu ca $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — iraționale: $\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi$
- $\mathbb{R}$ — reale: raționale și iraționale la un loc

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Numere naturale

- Numere **consecutive**: fiecare este cu 1 mai mare decât precedentul.
- Număr **par**: are forma $2k$. Număr **impar**: are forma $2k + 1$.
- Pătrat perfect**: este pătratul unui număr natural: 0, 1, 4, 9, 16, 25, ...
- Cub perfect**: este cubul unui număr natural: 0, 1, 8, 27, 64, ...

Scrierea în baza 10:

$$\overline{ab} = 10a + b \quad \overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$$

Un pătrat perfect **nu** se poate termina în 2, 3, 7 sau 8.

Teorema împărțirii cu rest

$$D = \hat{I} \cdot C + R, \quad \text{cu } 0 \leq R < \hat{I}$$

D = deîmpărțit, $\hat{I}$ = împărțitor, C = cât, R = rest.

Sume utile

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{suma primelor } n \text{ impare})$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \quad (\text{suma primelor } n \text{ pare})$$

$$\text{Câte numere sunt de la } a \text{ la } b \text{ din } p \text{ în } p: \frac{b-a}{p} + 1$$

Divizibilitate

$a \mid b$ — „ a divide pe b ”; $b : a$ — „ b se divide cu a ”.

- Număr **prim**: are exact doi divizori, 1 și el însuși.
- Număr **compus**: are mai mult de doi divizori.
- 0 și 1 nu sunt nici prime, nici compuse. 2 este singurul prim par.
- Numere **prime între ele**: au c.m.m.d.c. = 1.

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (descompunere în factori primi):

$$\text{numărul de divizori} = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

c.m.m.d.c.: factorii *comuni*, la puterea *cea mai mică*.

c.m.m.m.c.: factorii *comuni și necomuni*, la puterea *cea mai mare*.

$$(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$$

Criterii de divizibilitate

- cu 2**: ultima cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8
- cu 3**: suma cifrelor se divide cu 3
- cu 4**: numărul format din ultimele 2 cifre se divide cu 4
- cu 5**: ultima cifră este 0 sau 5
- cu 8**: numărul format din ultimele 3 cifre se divide cu 8
- cu 9**: suma cifrelor se divide cu 9
- cu 10**: ultima cifră este 0
- cu 25**: numărul format din ultimele 2 cifre se divide cu 25

Fracții

$\frac{a}{b}$: a — numărător, b — numitor ($b \neq 0$).

- subunitară**: numărător < numitor
- supraunitară**: numărător > numitor
- echiunitară**: numărător = numitor
- ireductibilă**: nu se mai poate simplifica
- echivalente**: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad \text{inversul lui } \frac{a}{b} \text{ este } \frac{b}{a}$$

Fracții zecimale

- finită**: $0, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_n}}{10^n}$
- periodică simplă**: la numitor atâția de 9 câte cifre are perioada
- periodică mixtă**: la numitor atâția de 9 câte cifre are perioada, urmați de atâția de 0 câte cifre are partea neperiodică; la numărător, tot numărul minus partea care nu se repetă

$$0,(a) = \frac{a}{9} \quad 0,b(a) = \frac{\overline{ba} - b}{90}$$

Rapoarte și proporții

Raport: câtul a două numere, $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).

Proporție: o egalitate de două rapoarte, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
 a și d sunt **extremii**; b și c sunt **mezii**.

$$\text{produsul mezilor} = \text{produsul extremilor: } a \cdot d = b \cdot c$$

Șir de rapoarte egale: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

Mărimi proporționale

Direct proporționale cu a și b : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k$, deci $x = ka$, $y = kb$. Când una crește, cealaltă crește.

Invers proporționale cu a și b : $x \cdot a = y \cdot b = k$, adică direct proporționale cu $\frac{1}{a}$ și $\frac{1}{b}$. Când una crește, cealaltă scade.

Procente

$$p\% \text{ din } N = \frac{p}{100} \cdot N$$

Cât la sută este a din N : $\frac{a}{N} \cdot 100\%$

Aflarea întregului: dacă $p\%$ din N este a , atunci $N = \frac{a \cdot 100}{p}$

Creștere cu $p\%$: $N \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ Reducere cu $p\%$: $N \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$

Concentrația unei soluții: $c = \frac{\text{substanță}}{\text{soluție}} \cdot 100\%$

Medii

Media aritmetică: $m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

Media ponderată (cu ponderile $p_1, \dots, p_n$): $m_p = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

Media geometrică (a două numere pozitive): $m_g = \sqrt{a \cdot b}$

Media armonică: $m_h = \frac{2ab}{a+b}$

$$m_h \leq m_g \leq m_a, \text{ cu egalitate doar când } a = b$$

Organizarea datelor. Probabilități

Media, mediana (valoarea din mijloc, după ordonare), **modul** (valoarea cea mai frecventă), **amplitudinea** (cea mai mare valoare – cea mai mică).

$$P = \frac{\text{cazuri favorabile}}{\text{cazuri posibile}}, \quad 0 \leq P \leq 1$$

2. Algebră

Puteri

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ a — baza, n — exponentul

$$\begin{aligned} \cdot a^0 &= 1 \quad (a \neq 0) & a^1 &= a & 1^n &= 1 \\ \cdot 0^n &= 0 \quad (n \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} & a^m : a^n &= a^{m-n} \\ (a^m)^n &= a^{m \cdot n} & (a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} & a^{-n} &= \frac{1}{a^n} & \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n \end{aligned}$$

Semnul: o putere cu exponent *par* este pozitivă; cu exponent *impar* păstrează semnul bazei.

Radicali

$$\sqrt{a} = b \iff b^2 = a, \text{ cu } a \geq 0 \text{ și } b \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= |a| & (\sqrt{a})^2 &= a \\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{ab} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} \end{aligned}$$

Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$ ($a \geq 0$)

Introducerea sub radical: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ ($a \geq 0$)

Raționalizarea numitorului: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ $\frac{a}{b \pm \sqrt{c}} = \frac{a(b \mp \sqrt{c})}{b^2 - c}$

Modulul (valoarea absolută)

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| \geq 0 \quad | -a | = |a| \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a| = |b| \iff a = b \text{ sau } a = -b$$

$$|a| \leq m \iff -m \leq a \leq m \quad (m > 0)$$

$$|a| \geq m \iff a \leq -m \text{ sau } a \geq m \quad (m > 0)$$

Partea întreagă și partea fracționară

$[x]$ — **partea întreagă:** cel mai mare număr întreg $\leq x$.
 $\{x\}$ — **partea fracționară.**

$$x = [x] + \{x\}, \quad \text{cu } 0 \leq \{x\} < 1$$

Formule de calcul prescurtat

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Descompunerea în factori

- **factor comun:** $ab + ac = a(b + c)$
- **formule:** $a^2 - b^2$, $a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^3 \pm b^3$
- **gruparea termenilor:** grupezi câte doi și dai factor comun de două ori

Pentru $x^2 + Sx + P$: cauți două numere care **adunate** dau S și **înmulțite** dau P .

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ecuatii

Gradul I: $ax + b = 0$, $a \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Dacă $a = 0$ și $b = 0$: infinite soluții. Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$: nicio soluție.

Gradul II: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta > 0$: două soluții reale distincte
- $\Delta = 0$: o soluție dublă, $x = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: nicio soluție reală

Relațiile lui Viète: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Sisteme de două ecuații

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Metoda substituției: dintr-o ecuație scoți o necunoscută și o înlocuiești în cealaltă.

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \\ a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1y}{a_1} + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Metoda reducerii: înmulțești ecuațiile cu numere potrivite, astfel încât coeficienții unei necunoscute să devină opuși, apoi aduni ecuațiile.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \begin{cases} \cdot a_2 \\ \cdot (-a_1) \end{cases}$$

Metoda grafică: soluția este punctul de intersecție a celor două drepte.

Soluția se scrie ca pereche ordonată: $S = \{(x, y)\}$.

Inecuații

Se rezolvă ca ecuațiile, cu o singură deosebire:

la înmulțirea sau împărțirea cu un număr **negativ**, sensul inegalității se **schimbă**

Intervale: $[a, b]$ — capete *incluse*; (a, b) — capete *excluse*.
 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Funcții

$f: A \rightarrow B$, $f(x) = ax + b$ — funcție de gradul I; graficul este o **dreaptă**.

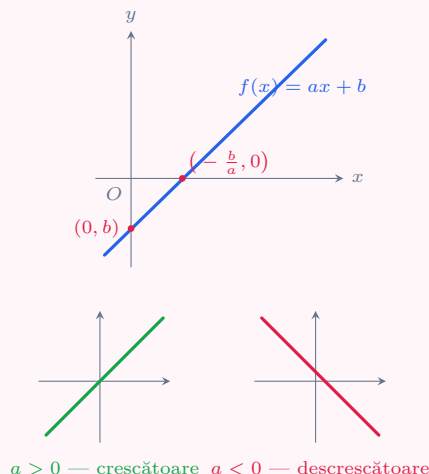
$$M(x_0, y_0) \in G_f \iff f(x_0) = y_0$$

Intersecția cu axa Oy: calculezi $f(0) \Rightarrow$ punctul $(0, f(0))$.

Intersecția cu axa Ox: rezolvi $f(x) = 0 \Rightarrow$ punctul $(x, 0)$.

Intersecția a două grafice: rezolvi $f(x) = g(x)$.

Funcția din două puncte: pui condițiile $f(x_1) = y_1$ și $f(x_2) = y_2$ și rezolvi sistemul în a și b .



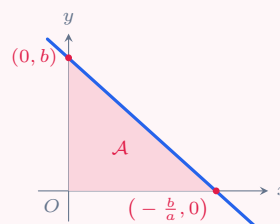
Distanțe și arii în plan

Distanța dintre două puncte:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Mijlocul segmentului AB : $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

Aria triunghiului format de graficul lui $f(x) = ax + b$ cu axele: $\mathcal{A} = \frac{b^2}{2|a|}$



Catetele sunt $|b|$ și $\left|\frac{b}{a}\right|$, deci $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot \left|\frac{b}{a}\right| = \frac{b^2}{2|a|}$.

Fracții algebrice

$\frac{E_1(x)}{E_2(x)}$ există doar pentru $E_2(x) \neq 0$.

Condiții de existență: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{rădăcinile numitorului}\}$

Se simplifică *numai* după ce numărătorul și numitorul au fost descompuși în factori.

3. Geometrie plană

Puncte, drepte, plane

- puncte **coliniare**: sunt situate pe aceeași dreaptă
- drepte **concurente**: se intersectează într-un punct
- drepte **paralele**: sunt în același plan și nu se intersectează ($a \parallel b$)
- drepte **perpendiculare**: formează un unghi drept ($a \perp b$)
- segmente **congruente**: au aceeași lungime ($[AB] \equiv [CD]$)

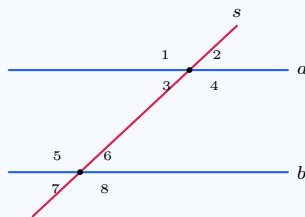
Axioma lui Euclid: printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă.

Unghiuri

- **congruente**: au măsuri egale
- **adiacente**: au același vârf și o latură comună
- **opuse la vârf**: laturile unuia sunt prelungirile laturilor celuilalt
- **complementare**: au suma 90°
- **suplementare**: au suma 180°
- **ascuțit** $< 90^\circ$; **drept** $= 90^\circ$; **obtuz** $> 90^\circ$
- **alungit** $= 180^\circ$; **nul** $= 0^\circ$

Unghiurile opuse la vârf sunt congruente.
Unghiurile din jurul unui punct au suma 360° .

Două paralele tăiate de o secantă formează unghiuri **alterne interne**, **alterne externe** și **corespondente** congruente, și unghiuri **interne de aceeași parte a secantei** suplementare. Reciproca este și ea adevărată.



alterne interne: 3 și 6, 4 și 5

alterne externe: 1 și 8, 2 și 7

corespondente: 1 și 5, 2 și 6, 3 și 7, 4 și 8

Triunghiul

După laturi: oarecare (scalene), isoscel (două laturi congruente), echilateral (toate laturile congruente).

După unghiuri: ascuțitunghic, dreptunghic, obtuzunghic.

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180° .

- Un unghi exterior este egal cu suma celor două unghiuri interioare nealăturate lui.
- **Inegalitatea triunghiului:** $|b - c| < a < b + c$
- Laturii mai mari se opun unghiului mai mare.
- În triunghiul isoscel, unghiurile de la bază sunt congruente.
- În triunghiul echilateral, toate unghiurile au 60° .

Criterii de congruență: LUL, ULU, LLL.

La triunghiuri dreptunghice: CC, IC, CU, IU.

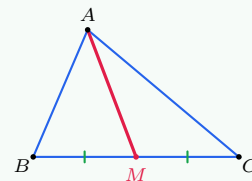
Linii importante în triunghi

- **Bisectoarea:** împarte un unghi în două unghiuri congruente. Bisectoarele sunt concurente în **I**, centrul cercului *înscris*.
- **Mediatoarea:** perpendiculara pe mijlocul unei laturi. Mediatoarele sunt concurente în **O**, centrul cercului *circumscriș*.
- **Înălțimea:** perpendiculara dintr-un vârf pe latura opusă. Înălțimile sunt concurente în **H**, ortocentrul.
- **Mediana:** unește un vârf cu mijlocul laturii opuse. Medianele sunt concurente în **G**, centrul de greutate.

G este la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază: $GA = \frac{2}{3} AM$

Teorema medianei — M este mijlocul lui BC :

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$



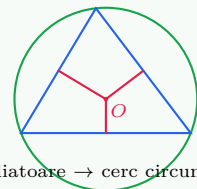
Într-un triunghi **dreptunghic**, mediana din unghiul drept este jumătate din ipotenuză — caz particular al teoremei.

Unde se află centrele:

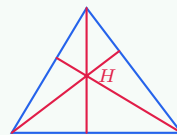
- triunghi **ascuțitunghic**: O și H în interior
- triunghi **dreptunghic**: O = mijlocul ipotenuzei, H = vârful unghiului drept
- triunghi **obtuzunghic**: O și H în exterior



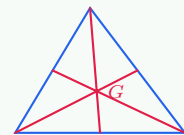
bisectoare → cerc înscris



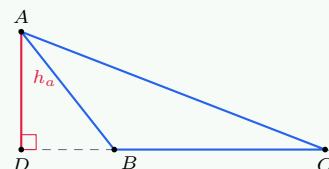
mediatoare → cerc circumscriș



înălțimi → ortocentru



mediane → centru de greutate



Într-un triunghi **obtuzunghic**, înălțimea dintr-un vârf al unui unghi ascuțit cade în afara triunghiului, pe prelungirea laturii opuse.

Asemănare

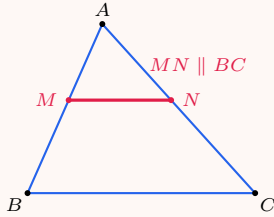
Teorema lui Thales: $MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

Teorema fundamentală a asemănării: dacă $MN \parallel BC$, atunci $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ și $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$.

Criterii de asemănare: UU, LUL, LLL.

Raportul ariilor = k^2 (pătratul raportului de asemănare)

Teorema bisectoarei: bisectoarea din A taie BC în D astfel încât $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.



Triunghiul dreptunghic

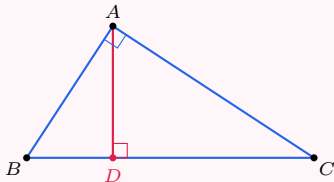
$\triangle ABC$ cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $AD \perp BC$:

Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Înălțimii: $AD^2 = BD \cdot DC$ și $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$

Catetei: $AB^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot BC$

- Cateta opusă unghiului de 30° este jumătate din ipotenuză.
- Mediana din unghiul drept este jumătate din ipotenuză.
- Reciproca lui Pitagora: dacă $a^2 = b^2 + c^2$, triunghiul este dreptunghic.



Trigonometrie

$$\sin = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuza}} \quad \cos = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuza}}$$

$$\text{tg} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} \quad \text{ctg} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}}$$

$$\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \quad \text{tg } u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

$$\sin(90^\circ - u) = \cos u \quad \text{tg } u \cdot \text{ctg } u = 1$$

	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Patrulatere

Paralelogram: laturile opuse paralele.

- laturile opuse congruente
- unghiurile opuse congruente, cele alăturate suplementare
- diagonalele se înjumătățesc

Dreptunghiul: paralelogram cu un unghi drept; diagonalele sunt congruente.

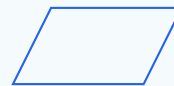
Rombul: paralelogram cu două laturi alăturate congruente; diagonalele sunt perpendiculare și bisectoare ale unghiurilor.

Pătratul: are toate proprietățile dreptunghiului și ale rombului.

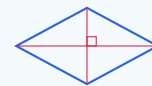
Trapezul: are două laturi paralele. *Isoscel:* laturile neparalele congruente. *Dreptunghic:* are un unghi drept.

$$\text{Linia mijlocie a trapezului: } \ell = \frac{B + b}{2}$$

Linia mijlocie în triunghi: unește mijloacele a două laturi, este paralelă cu a treia și egală cu jumătate din ea.



paralelogram



romb



trapez, linia mijlocie

Cercul

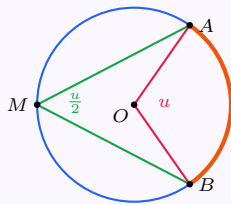
R — raza, $D = 2R$ — diametrul, coarda, arc.

$$\mathcal{L} = 2\pi R \quad \mathcal{A} = \pi R^2$$

- **Unghiul la centru** are măsura arcului cuprins între laturi.
- **Unghiul înscris** are măsura *jumătate* din arc cuprins între laturi.
- Unghiul înscris în semicerc este drept.
- Raza este perpendiculară pe tangentă în punctul de contact.
- Diametrul perpendicular pe o coardă înjumătățește coarda și arc.
- Tangentele duse dintr-un punct exterior sunt congruente.

Lungimea arcului de u° : $\ell = \frac{\pi R u}{180^\circ}$

Aria sectorului de u° : $\mathcal{A} = \frac{\pi R^2 u}{360^\circ}$



Unghiul la centru $\widehat{AOB}$ are măsura arcului; unghiul înscris $\widehat{AMB}$, care se sprijină pe același arc, are jumătate.

Patrulater inscriptibile și circumscriptibile

Inscriptibil = are toate vârfurile pe același cerc.

$$ABCD \text{ inscriptibil} \iff \widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$$

- Un patrulater este inscriptibil și atunci când două vârfuri de aceeași parte a unei laturi „văd” latura sub unghiuri congruente.
- Dreptunghiul, pătratul și trapezul isoscel sunt *întotdeauna* inscriptibile.

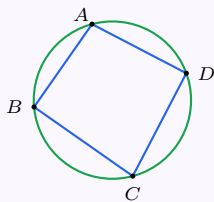
Teorema lui Ptolemeu (în patrulaterul inscriptibil):

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

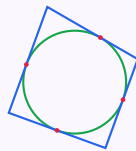
Circumscriptibil = are un cerc tangent la toate laturile.

$$ABCD \text{ circumscriptibil} \iff AB + CD = BC + AD$$

Rombul și pătratul sunt *întotdeauna* circumscriptibile.



inscriptibil
 $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$



circumscriptibil
 $AB + CD = BC + AD$

Formulele cu raza

R — raza cercului **circumscriș**; r — raza cercului **înscris**;
 $p = \frac{a+b+c}{2}$ — semiperimetrul.

$$\mathcal{A} = \frac{abc}{4R} \quad \mathcal{A} = p \cdot r$$

Triunghi dreptunghic: $R = \frac{\text{ipotenusa}}{2}$, $r = \frac{b+c-a}{2}$
(a = ipotenusa)

Triunghi echilateral de latură ℓ : $R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$,
 $R = 2r$

Pătrat de latură ℓ : $R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$, $r = \frac{\ell}{2}$

Hexagon regulat de latură ℓ : $R = \ell$, $r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

Poligon regulat cu n laturi: $\ell_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, apotema
 $a_n = R \cos \frac{180^\circ}{n}$

$$\mathcal{A}_{\text{poligon regulat}} = \frac{P \cdot a_n}{2}$$

Unghiul unui poligon regulat: $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$;

numărul de diagonale: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Arii și perimetre

Triunghi: $\mathcal{A} = \frac{b \cdot h}{2}$

Formula lui Heron: $\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
cu $p = \frac{a+b+c}{2}$

Triunghi echilateral de latură ℓ : $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, $\mathcal{A} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Triunghi dreptunghic: $\mathcal{A} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$

Paralelogram: $\mathcal{A} = b \cdot h$ **Dreptunghi**: $\mathcal{A} = L \cdot \ell$

Pătrat: $\mathcal{A} = \ell^2$, diagonala $d = \ell\sqrt{2}$

Romb: $\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = b \cdot h$

Trapez: $\mathcal{A} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$

Orice patrulater cu diagonale perpendiculare: $\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

4. Geometrie în spațiu

Poziții relative

Două drepte: concurente, paralele sau **necoplanare** (nu sunt în același plan și nu se intersectează).

Dreaptă și plan: dreapta este inclusă în plan, paralelă cu planul, sau îl intersectează într-un punct.

Două plane: paralele sau secante (se intersectează după o dreaptă).

O dreaptă este paralelă cu un plan dacă este paralelă cu o dreaptă din plan.

Perpendicularitate în spațiu

O dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă este perpendiculară pe două drepte concurente din acel plan.

Teorema celor trei perpendiculare

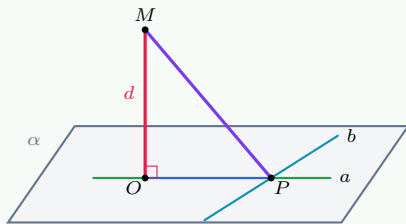
Dacă $d \perp \alpha$ în O , $a \subset \alpha$ trece prin O , $b \subset \alpha$ cu $a \perp b$ în P , și $M \in d$, atunci $MP \perp b$.

Proiecția unui punct pe un plan este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe plan.

Unghiul dintre o dreaptă și un plan = unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe plan.

lungimea proiecției = lungimea segmentului $\cdot \cos u$

Unghiul diedru se măsoară cu unghiul plan corespunzător: din fiecare semiplan se duce câte o perpendiculară pe muchie, în același punct.



$d \perp \alpha$ în O ; $a \subset \alpha$ prin O ; $b \subset \alpha$ cu $a \perp b$ în $P \Rightarrow MP \perp b$.

Prisma

$\mathcal{A}_\ell$ — aria laterală, $\mathcal{A}_b$ — aria bazei, $\mathcal{A}_t$ — aria totală, V — volumul, h — înălțimea.

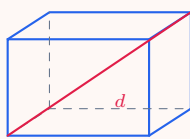
$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b \quad V = \mathcal{A}_b \cdot h$$

La prisma dreaptă: $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h$ (P_b = perimetrul bazei).

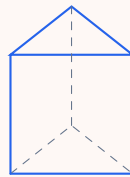
Cub de muchie ℓ : $\mathcal{A}_t = 6\ell^2$, $V = \ell^3$, diagonala $d = \ell\sqrt{3}$

Paralelipiped dreptunghic (a, b, c) :

$\mathcal{A}_t = 2(ab + bc + ca)$, $V = abc$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



paralelipiped



prismă

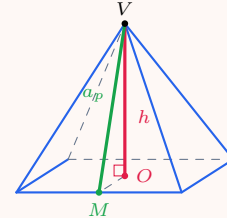
Piramida

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b \quad V = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$$

La piramida regulată: $\mathcal{A}_\ell = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$, unde a_p este **apotema piramidei** (înălțimea unei fețe laterale).

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2$$

(a_b = apotema bazei). Muchia laterală: $m^2 = h^2 + R^2$, cu R raza cercului circumscris bazei.



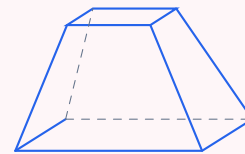
$VO = h$ (înălțimea), $VM = a_p$ (apotema piramidei), $OM = a_b$ (apotema bazei).

Trunchiul de piramidă

$$V = \frac{h}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$

La trunchiul regulat: $\mathcal{A}_\ell = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2}$, unde a_t este apotema trunchiului.



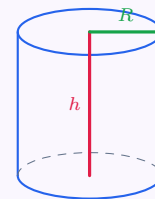
trunchi de piramidă

Cilindrul circular drept

$$\mathcal{A}_\ell = 2\pi R h \quad \mathcal{A}_t = 2\pi R(R + h) \quad V = \pi R^2 h$$

Desfășurarea suprafeței laterale este un **dreptunghi** cu dimensiunile $2\pi R$ și h .

Secțiunea axială este un dreptunghi cu dimensiunile $2R$ și h .



Conul circular drept

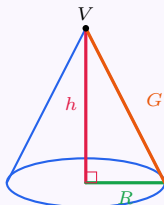
G — generatoarea, R — raza bazei, h — înălțimea.

$$G^2 = R^2 + h^2$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi R G \quad \mathcal{A}_t = \pi R(R + G) \quad V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

Desfășurarea suprafeței laterale este un **sector de cerc** de rază G , cu unghiul la centru $u = \frac{360^\circ \cdot R}{G}$.

Secțiunea axială este un triunghi isoscel cu baza $2R$ și înălțimea h .

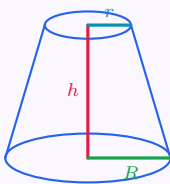


Trunchiul de con

$$\mathcal{A}_\ell = \pi G(R + r) \quad \mathcal{A}_t = \pi(R^2 + r^2 + G(R + r))$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

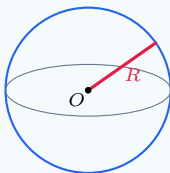
$$G^2 = h^2 + (R - r)^2$$



Sfera

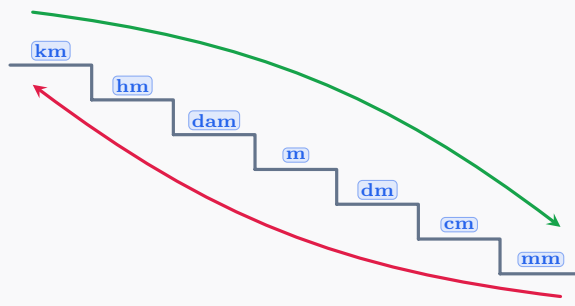
$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Orice secțiune printr-o sferă este un cerc; secțiunea prin centru se numește **cerc mare** și are raza R .



Scara transformărilor

coborâm o treaptă: $\times 10$



urcăm o treaptă: $: 10$

Aceeași scară este și pentru **capacitate** (kl, hl, dal, l, dl, cl, ml) și pentru **masă** (kg, hg, dag, g, dg, cg, mg).

lungime: o treaptă $= \times 10$
arie: o treaptă $= \times 100$ **volum:** o treaptă $= \times 1000$

La arie treapta este 10^2 , la volum 10^3 , pentru că unitatea se ia la pătrat, respectiv la cub.

Unități de măsură

Lungime: 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm;
1 km = 1000 m

Arie: 1 m² = 100 dm² = 10 000 cm²
1 ar = 100 m²; 1 ha = 100 ari = 10 000 m²
1 km² = 100 ha = 1 000 000 m²

Volum: 1 m³ = 1000 dm³ = 1 000 000 cm³

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \ell \quad 1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml} \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \ell$$

Masă: 1 t = 10 q = 1000 kg; 1 kg = 1000 g

Timp: 1 h = 60 min = 3600 s;
1 an = 365 zile (bisect: 366); 1 deceniu = 10 ani; 1 secol = 100 ani

Aproximări și rotunjiri

Prin lipsă = cea mai mare valoare mai mică decât numărul.
Prin adaos = cea mai mică valoare mai mare decât numărul.

La **rotunjire** te uiți la prima cifră lăsată deoparte:
dacă e 0, 1, 2, 3, 4 → prin lipsă; dacă e 5, 6, 7, 8, 9 → prin adaos.

Valori de reținut:

$$\pi \approx 3,14 \quad \sqrt{2} \approx 1,41 \quad \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$\sqrt{5} \approx 2,24 \quad \sqrt{6} \approx 2,45 \quad \sqrt{7} \approx 2,65$$

Greșeli care se plătesc scump

- $\sqrt{a^2} = |a|$, nu a — contează semnul.
- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ și $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.
- La inecuații, înmulțirea cu un număr negativ **schimbă** sensul.
- Frația se simplifică doar după descompunerea în factori, niciodată termen cu termen.
- La fracții algebrice, pui *întâi* condițiile de existență.
- $a^0 = 1$ doar pentru $a \neq 0$.
- Aria se măsoară în unități pătrate, volumul în unități cub — la transformări, $\times 100$, respectiv $\times 1000$.