

Divizibilitatea numerelor naturale

Divizori · multipli · criterii · numere prime · Clasa a V-a

1. Divizor și multiplu

Spunem că a **divide** pe b dacă b se împarte exact la a , adică restul împărțirii este 0.

$a \mid b$ se citește „ a divide pe b ”

$b : a$ se citește „ b se divide cu a ”

$3 \mid 12$, pentru că $12 : 3 = 4$ rest 0.

$5 \nmid 12$, pentru că $12 : 5 = 2$ rest 2.

Divizorii unui număr

Divizorii lui n sunt numerele care îl împart exact.

$$D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Orice număr are cel puțin doi divizori: pe 1 și pe el însuși. Divizorii se caută **în perechi**:

$$12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4.$$

Multiplii unui număr

Multiplii lui n se obțin înmulțind pe n cu $0, 1, 2, 3, \dots$

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$$

Multiplii sunt **infiniți**. Cel mai mic multiplu al oricărui număr este 0.

Nu le încurca. Divizorii lui 12 sunt **mai mici sau egali** cu 12 și sunt în număr finit. Multiplii lui 12 sunt **mai mari sau egali** cu 12 (în afară de 0) și sunt infiniți.

2. Proprietăți ale divizibilității

- $1 \mid a$ pentru orice a (1 divide orice număr)
- $a \mid a$ pentru orice a (orice număr se divide cu el însuși)
- $a \mid 0$ pentru orice $a \neq 0$ (0 se divide cu orice)
- dacă $a \mid b$ și $b \mid c$, atunci $a \mid c$
- dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid (b + c)$ și $a \mid (b - c)$

3. Criterii de divizibilitate

Ca să afli dacă un număr se divide cu altul, nu e nevoie să faci împărțirea. Te uiți doar la cifre.

Criteriile

cu 2	ultima cifră este 0, 2, 4, 6 sau 8 (numărul e par)
cu 5	ultima cifră este 0 sau 5
cu 10	ultima cifră este 0
cu 100	ultimele două cifre sunt 00
cu 4	numărul format din ultimele două cifre se divide cu 4
cu 3	suma cifrelor se divide cu 3
cu 9	suma cifrelor se divide cu 9

3 762: ultima cifră e 2, deci se divide **cu 2**.

Suma cifrelor: $3 + 7 + 6 + 2 = 18$. Cum $18 : 3 = 6$, se divide **cu 3**. Cum $18 : 9 = 2$, se divide și **cu 9**.

Ultimele două cifre: 62, care nu se divide cu 4, deci 3 762 nu se divide cu 4.

Un număr care se divide cu 9 se divide și cu 3, pentru că $9 = 3 \cdot 3$. Invers nu e adevărat: 12 se divide cu 3, dar nu cu 9.

Criterii combinate

Ca să verifici divizibilitatea cu un număr compus, îl descompui în factori **primi între ei** și verifici fiecare factor.

cu 6: se divide cu 2 și cu 3

cu 15: se divide cu 3 și cu 5

cu 45: se divide cu 9 și cu 5

Atenție: pentru 12 nu e destul „cu 2 și cu 6” — 2 și 6 nu sunt prime între ele. Trebuie „cu 4 și cu 3”.

4. Numere prime și numere compuse

Un număr natural mai mare decât 1 este **prim** dacă are exact **doi divizori**: pe 1 și pe el însuși. Altfel este **compus**.

Numerele prime până la 100 (sunt 25):

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47,
53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

0 și 1 **nu sunt** nici prime, nici compuse.

2 este **singurul** număr prim par. Toate celelalte numere pare se divid cu 2, deci au cel puțin trei divizori.

Cum verifici dacă un număr este prim

Îl împarți pe rând la numerele prime 2, 3, 5, 7, 11, ... până când **pătratul** divizorului depășește numărul. Dacă niciunul nu-l divide, numărul este prim.

Pentru 97: încerci 2, 3, 5, 7. Următorul ar fi 11, dar $11^2 = 121 > 97$, deci te oprești. Niciunul nu-l divide $\Rightarrow$ 97 este prim.

5. Descompunerea în factori primi

Orice număr natural mai mare decât 1 se scrie **într-un singur fel** ca produs de puteri de numere prime.

Împarți succesiv la numere prime, începând cu cel mai mic:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Câți divizori are un număr

Dacă $n = a^x \cdot b^y \cdot c^z$ (cu a, b, c prime), atunci numărul de divizori naturali ai lui n este

$$(x+1) \cdot (y+1) \cdot (z+1)$$

Pentru $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$: $(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ divizori.

De ce funcționează: un divizor al lui 360 se scrie $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, unde i poate fi 0, 1, 2 sau 3 (patru variante), j poate fi 0, 1 sau 2 (trei variante), iar k poate fi 0 sau 1 (două variante). Le combinăm: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

6. Împărțirea cu rest

$$D = \hat{I} \cdot C + R, \quad \text{cu } 0 \leq R < \hat{I}$$

D — deîmpărțit, $\hat{I}$ — împărțitor, C — cât, R — rest.

$47 : 6 = 7$ rest 5, pentru că $47 = 6 \cdot 7 + 5$ și $5 < 6$.

Numărul se divide cu $\hat{I}$ exact atunci când $R = 0$.

Restul este mereu mai mic decât împărțitorul. La împărțirea cu 6, resturile posibile sunt doar 0, 1, 2, 3, 4, 5. Dacă îți iese rest 7 la împărțirea cu 6, ai greșit câtul.

7. Numere prime între ele

Două numere sunt **prime între ele** dacă singurul lor divizor comun este 1.

8 și 15 sunt prime între ele:

$D_8 = \{1, 2, 4, 8\}$, $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ — au în comun doar pe 1.

8 și 12 **nu** sunt prime între ele — au în comun și pe 2 și pe 4.

Nu confunda. „Numere prime” înseamnă că fiecare număr în parte e prim. „Prime între ele” e o relație **între** două numere — ele pot fi și compuse, ca 8 și 15.

8. Recapitulare

Ce trebuie să știi să faci

- să scrii toți divizorii unui număr, căutându-i **în perechi**
- să spui dacă un număr se divide cu 2, 3, 4, 5, 9, 10 fără să faci împărțirea
- să recunoști numerele prime până la 100
- să descompui un număr în factori primi
- să afli câți divizori are un număr, din descompunere
- să folosești $D = \hat{I} \cdot C + R$ în probleme cu rest

Drumul obișnuit la o problemă: descompui numărul în factori primi, iar de acolo afli tot — divizorii, câți sunt, cu ce se divide numărul. Descompunerea în factori primi este cheia întregului capitol.