

Puteri

Reguli de calcul · pătrate perfecte · scrierea în baze · Clasa a V-a

O **putere** este o înmulțire repetată a aceluiași număr.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$$

a se numește **bază**, n se numește **exponent**.

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$7^2 = 49$$

Atenție: a^n nu înseamnă $a \cdot n$. $2^5 = 32$, nu 10. E cea mai frecventă confuzie la început.

1. Cazuri speciale

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1 \quad (\text{pentru } a \neq 0)$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0 \quad (\text{pentru } n \neq 0)$$

a^2 se citește „a la pătrat”, iar a^3 se citește „a la cub” — denumiri care vin din geometrie: aria pătratului și volumul cubului.

2. Regulile de calcul

Acceași bază

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (\text{cu } m \geq n)$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 = 128$$

$$3^7 : 3^4 = 3^3 = 27$$

Putere la putere

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Produs la putere

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(2^3)^4 = 2^{12} = 4096$$

$$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$$

Nu există regulă pentru adunare. $a^m + a^n$ nu se poate simplifica. $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$, care nu e nicio putere a lui 2.

3. Pătrate perfecte

Un **pătrat perfect** este un număr care se poate scrie ca pătratul unui număr natural.

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, \dots$$

Un test rapid

Un pătrat perfect se poate termina **doar** în 0, 1, 4, 5, 6 sau 9.

Niciodată în 2, 3, 7 sau 8.

2048 se termină în 8, deci **sigur nu** e pătrat perfect. Ai aflat dintr-o privire, fără niciun calcul.

Dar testul nu funcționează invers. 26 se termină în 6 și totuși nu e pătrat perfect. Testul **exclue** rapid, nu **confirmă**.

4. Compararea puterilor

Aceeași bază → e mai mare cea cu exponentul mai mare.

Același exponent → e mai mare cea cu baza mai mare.

Nici una, nici alta → le aduci la aceeași bază sau la același exponent.

Exemplul 1. Compară 4^5 și 2^{11} .

Le aducem la **aceeași bază**: $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}$. Cum $10 < 11$, rezultă $4^5 < 2^{11}$.

Exemplul 2. Compară 2^{30} și 3^{20} .

Le aducem la **același exponent**, 10:

$$2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10} \qquad 3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$$

Cum $8 < 9$, rezultă $2^{30} < 3^{20}$.

Nu calcula valorile! 2^{30} are zece cifre. Toată ideea comparării puterilor e să afli care e mai mare **fără** să le calculezi.

5. Ultima cifră a unei puteri**Notăția**

$U(a)$ = ultima cifră a numărului a

$$U(347) = 7 \qquad U(2^5) = U(32) = 2$$

$U(a^n)$ depinde **doar** de $U(a)$ și de exponentul n . Nu trebuie să calculezi puterea, oricât ar fi de mare.

Ideea: ultimele cifre se **repetă**. Găsești ciclul de repetare, apoi vezi unde cade exponentul în el.

6. Cazul 1 — cifrele fără ciclu

Dacă $U(a) \in \{0, 1, 5, 6\}$, atunci $U(a^n) = U(a)$ pentru orice n .

Aceste cifre **nu au ciclu** — se reproduc pe ele însele la orice putere.

$$U(5^{123}) = 5$$

$$U(6^{77}) = 6$$

$$U(1^{999}) = 1$$

E ușor de verificat: $5 \cdot 5 = 25$, iar 25 se termină tot în 5. $6 \cdot 6 = 36$, tot în 6. Oricât ai înmulți, cifra rămâne.

7. Cazul 2 — ciclu de lungime 2

$$U(a) = 4: \quad \text{ciclul este } 4, 6$$

$$U(a) = 9: \quad \text{ciclul este } 9, 1$$

Contează **paritatea** exponentului: exponent **impar** → prima cifră, exponent **par** → a doua.

$$U(4^{27}) = 4 \quad (27 \text{ impar})$$

$$U(9^{30}) = 1 \quad (30 \text{ par})$$

8. Cazul 3 — ciclu de lungime 4

$U(a)$	Ciclul
2	2, 4, 8, 6
3	3, 9, 7, 1
7	7, 9, 3, 1
8	8, 4, 2, 6

Împarți **exponentul la 4** și te uiți la **rest**.

rest 1, 2, 3 → cifra de pe acea poziție din ciclu

rest 0 → **ultima** cifră din ciclu

Exemplu. $U(3^{101})$. Ciclul lui 3 este 3, 9, 7, 1.

$101 : 4 = 25$ rest 1, deci luăm prima cifră: $U(3^{101}) = 3$.

Exemplu. $U(2^{2024})$. Ciclul lui 2 este 2, 4, 8, 6.

$2024 : 4 = 506$ rest 0, deci luăm ultima: $U(2^{2024}) = 6$.

Restul 0 e capcana. Nu înseamnă „prima cifră din ciclu”, ci **ultima**. Exponentul a parcurs ciclul de un număr întreg de ori și s-a oprit exact la capăt.

De ce nu se împarte mereu la 4: ciclurile au lungimi diferite. La 4 și 9 ciclul are doar două cifre, iar la 0, 1, 5, 6 nu există ciclu. **Regula generală** e să găsești ciclul, apoi să împarți exponentul la **lungimea lui**.

La sume, aduni ultimele cifre și păstrezi ultima cifră a rezultatului.

$$U(2^{10} + 3^7) = U(4 + 7) = U(11) = 1$$

Legătura cu pătratele perfecte: dacă ridici la pătrat cifrele de la 0 la 9, ultimele cifre care ies sunt 0, 1, 4, 5, 6, 9 — exact lista din secțiunea anterioară. De aceea un pătrat perfect nu se poate termina în 2, 3, 7 sau 8.

9. Scrierea în baza 10

Orice număr natural se poate scrie ca sumă de puteri ale lui 10, fiecare înmulțită cu cifra din ordinul respectiv.

$$3457 = 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$$

Când o cifră e 0, termenul dispare:

$$20\,406 = 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 6$$

10. Scrierea în baza 2

În **baza 2** se folosesc doar cifrele 0 și 1, iar în loc de puteri ale lui 10 se folosesc **puteri ale lui 2**. E baza în care lucrează calculatoarele.

Cum treci un număr în baza 2

Împarți succesiv la 2 și reții resturile.

Citești resturile **de jos în sus**.

Exemplu. Scrie 13 în baza 2.

$$\begin{array}{rcl} 13 : 2 & = & 6 \text{ rest } 1 \\ 6 : 2 & = & 3 \text{ rest } 0 \\ 3 : 2 & = & 1 \text{ rest } 1 \\ 1 : 2 & = & 0 \text{ rest } 1 \end{array}$$

Citite de jos în sus: $13 = \overline{1101}_{(2)}$

Verificarea se face desfăcând în puteri ale lui 2:

$$1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 8 + 4 + 0 + 1 = 13 \quad \checkmark$$

Alte exemple: $6 = \overline{110}_{(2)}$, $25 = \overline{11001}_{(2)}$, $32 = \overline{100000}_{(2)}$.

Observă că puterile lui 2 se scriu cu un 1 urmat de zerouri, exact cum puterile lui 10 se scriu așa în baza zece.

De reținut

La **înmulțire** exponenții se **adună**, la **împărțire** se **scad**, iar la **putere la putere** se **înmulțesc**. Pentru adunare nu există regulă.

Un **pătrat perfect** nu se termină niciodată în 2, 3, 7 sau 8.

Puterile se compară aducându-le la **aceeași bază** sau la **același exponent** — nu calculându-le.

Pentru **ultima cifră**, $U(a^n)$, cauți **ciclul de repetare** și împarți exponentul la **lungimea lui**. Cifrele 0, 1, 5, 6 nu au ciclu, iar 4 și 9 au ciclu de doar două cifre.