

Ecuații în $\mathbb{Q}$

Ecuații cu fracții · probleme · Clasa a VI-a

Metodele sunt exact aceleași ca la ecuațiile în $\mathbb{Z}$: metoda balanței și metoda mersului invers. Singura noutate: coeficienții sunt fracții.

1. Cele patru tipuri de bază

$$x + a = b \Rightarrow x = b - a$$

$$x : a = b \Rightarrow x = b \cdot a$$

$$x \cdot a = b \Rightarrow x = b : a$$

$$ax + b = c \Rightarrow x = (c - b) : a$$

Exemplul 1. $x + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$

Proba: $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$ ✓

Exemplul 2. $x \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \Rightarrow x = \frac{9}{8} : \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$

Proba: $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$ ✓

Exemplul 3. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

Aducem întâi $-\frac{1}{2}$ în dreapta: $\frac{2}{3}x = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Apoi împărțim la $\frac{2}{3}$: $x = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$

Proba: $\frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$ ✓

2. Trucul care simplifică totul: scapi de numitori

Când ecuația are mai multe fracții, **înmulțește ambele părți** cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor. Frațiile dispar și rămâi cu numere întregi.

Exemplu. $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$. Numitorii sunt 2 și 3, iar $[2, 3] = 6$. Înmulțim **tot** cu 6:

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 5 \Rightarrow 3x + 2x = 30 \Rightarrow 5x = 30 \Rightarrow x = 6$$

Proba: $\frac{6}{2} + \frac{6}{3} = 3 + 2 = 5$ ✓

Atenție! Înmulțești **fiecare** termen, inclusiv pe cei fără fracție. Dacă sari peste unul, ecuația se strică.

Exemplu cu x în ambele părți. $\frac{3x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} + 1$

Înmulțim tot cu 4: $3x - 2 = x + 4$. Trecem termenii cu x în stânga și numerele în dreapta, schimbând semnul:

$$3x - x = 4 + 2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Proba: $\frac{9}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ și $\frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$ ✓

3. Probleme rezolvate cu ecuații

Cei trei pași: notezi cu x ce ți se cere, scrii ecuația din enunț, o rezolvi, și **verifici în enunț**, nu doar în ecuație.

Problema 1. Un elev a citit $\frac{2}{5}$ dintr-o carte în prima zi și $\frac{1}{3}$ în a doua. I-au mai rămas 60 de pagini. Câte pagini are cartea?

Notăm cu x numărul total de pagini. A citit $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{6}{15} + \frac{5}{15} = \frac{11}{15}$, deci au rămas $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$ din carte, adică 60 de pagini:

$$\frac{4}{15}x = 60 \quad \Rightarrow \quad x = 60 : \frac{4}{15} = 60 \cdot \frac{15}{4} = 225$$

Răspuns: cartea are 225 de pagini. **Verificare în enunț:** $\frac{2}{5} \cdot 225 = 90$, $\frac{1}{3} \cdot 225 = 75$, iar $225 - 90 - 75 = 60$ ✓

Problema 2. Prețul unui produs a scăzut cu $\frac{1}{4}$ și a ajuns la 90 de lei. Cât costa înainte?

Notăm cu x prețul inițial. A scăzut cu $\frac{x}{4}$, deci a rămas $x - \frac{x}{4} = 90$. Înmulțim tot cu 4:

$$4x - x = 360 \quad \Rightarrow \quad 3x = 360 \quad \Rightarrow \quad x = 120$$

Răspuns: costa 120 de lei. **Verificare:** scăderea a fost $\frac{120}{4} = 30$ lei, iar $120 - 30 = 90$ ✓

De reținut

Când vezi mai multe fracții, **înmulțește tot** cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor. Scapi de ele din prima și rămâi cu numere întregi.

Când muți un termen peste egal, **îi schimbi semnul**. La probleme, verificarea se face **în enunț**, nu în ecuație — altfel nu prinzi o ecuație scrisă greșit.