

Operații cu numere raționale

Amplificare · simplificare · cele patru operații · Clasa a VI-a

Regulile de semn sunt **exact aceleași** ca la numerele întregi. Ce se adaugă aici este lucrul cu **numitori**: ca să aduni sau să scazi, ai nevoie de același numitor.

1. Recapitulare utilă: amplificarea și simplificarea

Amplificarea și simplificarea **nu schimbă valoarea** fracției. Schimbă doar cum arată. Sunt cele mai folosite unelte din tot capitolul.

Amplificare

Înmulțești și numărătorul, și numitorul cu **același** număr nenul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

$$\frac{2}{3} \stackrel{(5)}{=} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

Se folosește ca să **aduci fracțiile la același numitor**.

Simplificare

Împarți și numărătorul, și numitorul cu **același** număr.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$$

$$\frac{18}{24} \stackrel{(6)}{=} \frac{18 : 6}{24 : 6} = \frac{3}{4}$$

Se folosește ca să **aduci rezultatul la forma cea mai simplă**.

Cum simplifici cel mai repede: împarți la **c.m.m.d.c.** al numărătorului și numitorului, și ajungi din prima la forma ireductibilă.

$$\frac{45}{60}: (45, 60) = 15, \text{ deci } \frac{45 : 15}{60 : 15} = \frac{3}{4}$$

O fracție se numește **ireductibilă** dacă nu mai poate fi simplificată, adică numărătorul și numitorul sunt **prime între ele**. Rezultatul se lasă întotdeauna în această formă.

2. Adunarea și scăderea

Același numitor → aduni sau scazi numărătorii, numitorul rămâne: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

Numitori diferiți → îi aduci la **același numitor** prin amplificare, apoi aduni numărătorii.

Exemplu. Calculează $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Numitor comun: $[2, 3] = 6$.

$$\frac{1}{2} \overset{(3)}{=} \frac{3}{6} \quad \frac{1}{3} \overset{(2)}{=} \frac{2}{6}$$

$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Exemplu cu rezultat negativ. Calculează $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$.

Numitor comun: $[4, 6] = 12$.

$$\frac{9}{12} - \frac{10}{12} = \frac{9-10}{12} = -\frac{1}{12}$$

Numitorul comun cel mai bun este $[a, b]$, cel mai mic multiplu comun. Poți folosi și produsul $a \cdot b$ — merge întotdeauna, dar ies numere mai mari și ai de simplificat la final.

3. Înmulțirea

Cea mai simplă operație: **numărător cu numărător, numitor cu numitor**. Nu ai nevoie de numitor comun.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \quad \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$$

Simplifică înainte să înmulțești — e mult mai ușor:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{\cancel{2}^1}{3} \cdot \frac{9^{\cancel{3}}}{\cancel{10}^5} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

Am simplificat 2 cu 10, și 3 cu 9, înainte de înmulțire.

4. Împărțirea

Împărțirea se transformă în înmulțire cu inversul celei de-a doua fracții. Inversul lui $\frac{c}{d}$ este $\frac{d}{c}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

Atenție! Se răstoarnă **doar a doua** fracție, cea la care împarți. Prima rămâne neschimbată.

5. Puteri cu exponent întreg

La ridicarea la putere, se ridică **și numărătorul, și numitorul**:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Semnul se stabilește ca la numerele întregi: exponent par → plus, exponent impar → minus.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$$

Exponent negativ → răstorni fracția și schimbi semnul exponentului:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \qquad 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

Regulile de calcul rămân aceleași:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad a^0 = 1$$

6. Ordinea operațiilor — exemplu rezolvat

Calculează $-\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$

Pasul 1. Paranteza. Numitor comun 6:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Pasul 2. Înmulțirea:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Pasul 3. Adunarea. Numitor comun 8:

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} = -\frac{4}{8} + \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}$$

De reținut

Aduni și scazi doar cu același numitor — amplifici ca să-l obții. **Înmulțești și împarți** fără numitor comun, direct.

Împărțirea se face prin înmulțire cu inversul. **Exponentul negativ** răstoarnă fracția. Rezultatul se lasă mereu **simplificat**.