

Rapoarte și proporții

Proprietatea fundamentală · proporții derivate · Clasa a VI-a

Raportul a două numere a și b (cu $b \neq 0$) este câtul $\frac{a}{b}$. Arată **de câte ori** este unul mai mare decât celălalt.

1. Ce spune un raport

Dacă într-o clasă sunt 12 fete și 16 băieți, raportul fetelor față de băieți este $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$. Se citește „3 la 4” și înseamnă că la fiecare 3 fete există 4 băieți.

Raportul **se simplifică** ca orice fracție, iar valoarea lui nu se schimbă. Un raport nu are unitate de măsură — este doar un număr.

Atenție la ordine: raportul fetelor față de băieți este $\frac{3}{4}$, dar al băieților față de fete este $\frac{4}{3}$. Nu e același lucru.

2. Proporția și proprietatea fundamentală

O **proporție** este egalitatea a două rapoarte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 a și d se numesc **extremi**, iar b și c se numesc **mezi**.

Proprietatea fundamentală: într-o proporție, **produsul extremilor este egal cu produsul mezilor**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Verificare. Este $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ o proporție? $3 \cdot 8 = 24$ și $4 \cdot 6 = 24$, deci **da**. ✓

Această proprietate se numește și **înmulțire în cruce** — desenezi un $\times$ peste proporție și înmulțești pe diagonale.

$$\begin{array}{cc} a & c \\ \diagdown & \diagup \\ b & d \end{array} \quad \overline{a \cdot d} = \underline{b \cdot c}$$

3. Aflarea termenului necunoscut

Scrii proprietatea fundamentală, apoi împarți la numărul care înmulțește necunoscuta. Necunoscuta poate fi în oricare dintre cele patru poziții.

1. $\frac{x}{5} = \frac{12}{15} \Rightarrow 15x = 5 \cdot 12 = 60 \Rightarrow x = 4$
2. $\frac{8}{x} = \frac{12}{9} \Rightarrow 12x = 8 \cdot 9 = 72 \Rightarrow x = 6$

$$3. \frac{3}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow 6x = 3 \cdot 10 = 30 \Rightarrow x = 5$$

$$4. \frac{3}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow 3x = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow x = 12$$

Verifică mereu înlocuind: la ultima, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$, iar $3 \cdot 12 = 36 = 4 \cdot 9$. ✓

4. Proporții derivate

Dintr-o proporție se pot obține altele, tot adevărate. Cele mai folosite:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Exemplu. Pornim de la $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$.

Schimbând mezii între ei: $\frac{6}{8} = \frac{9}{12}$, adică $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ ✓

Adunând numitorul la numărător: $\frac{6+9}{9} = \frac{8+12}{12}$, adică $\frac{15}{9} = \frac{20}{12}$, iar amândouă se simplifică la $\frac{5}{3}$ ✓

5. Două aplicații din viață

Scara unei hărți. O hartă are scara 1 : 200 000. Asta înseamnă că 1 cm pe hartă reprezintă 200 000 cm în realitate. Cât reprezintă 3 cm?

$$\frac{1}{200\,000} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3 \cdot 200\,000 = 600\,000 \text{ cm} = 6 \text{ km}$$

Concentrația unei soluții. Amestecăm 20 g de sare cu 180 g de apă. Soluția are $20 + 180 = 200$ g. Concentrația este raportul dintre sare și soluție:

$$\frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 10\%$$

Greșeala clasică la concentrație: se raportează sarea la **apă** ($\frac{20}{180}$) în loc de **toată soluția** ($\frac{20}{200}$). Concentrația se calculează mereu față de amestecul total.

De reținut

Într-o proporție, **produsul extremilor este egal cu produsul mezilor**. Din asta se rezolvă orice necunoscută, oriunde ar sta.

Ordinea contează: $\frac{a}{b}$ și $\frac{b}{a}$ sunt rapoarte diferite. Iar concentrația se raportează la **soluția totală**, nu doar la apă.