

Cercul

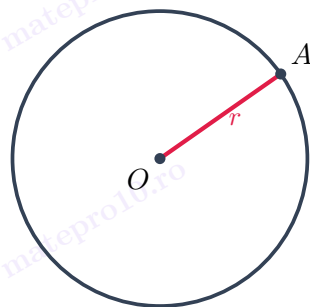
Clasa a VII-a

1. Cercul, centrul și raza

Mulțimea punctelor din plan **egal depărtate** de un punct fix se numește **cerc**.

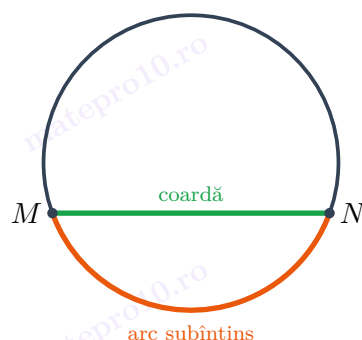
$\mathcal{C}(O, r)$ = cercul de centru O și rază r .

Raza = segmentul care unește centrul cu un punct de pe cerc.



2. Coarda și arcul subîntins

Segmentul care unește **două puncte de pe cerc** se numește **coardă**, iar arcul corespunzător se numește **arcul subîntins** de coardă.

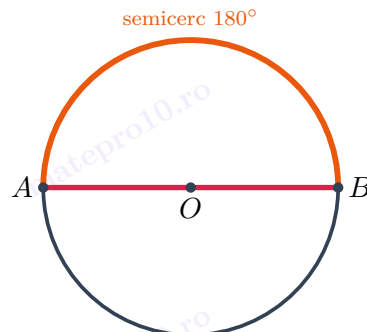


3. Diametrul și semicercul

Coarda care trece **prin centrul cercului** se numește **diametru**. Într-un cerc, diametrul este **cea mai mare** dintre coarde.

Arcul determinat de un diametru se numește **semicerc**, iar punctele A și B se numesc **diametral opuse**.

Măsura unui cerc este 360° . Un semicerc are întotdeauna 180° .



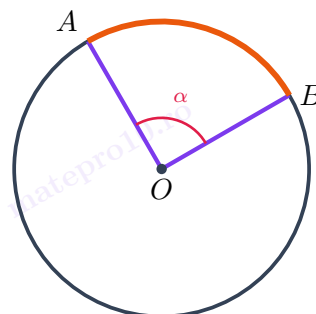
4. Arcul de cerc. Unghiul la centru

Porțiunea dintr-un cerc determinată de **două puncte distincte** se numește **arc de cerc**. Se notează $\widehat{MN}$ (se referă la arc mic).

Un unghi cu **vârful în centrul cercului** se numește **unghi la centru**.

$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$ — unghiul la centru are aceeași măsură cu arc mic cuprins între laturi.

Măsura **arcului mare** = 360° — măsura arcului mic corespunzător.

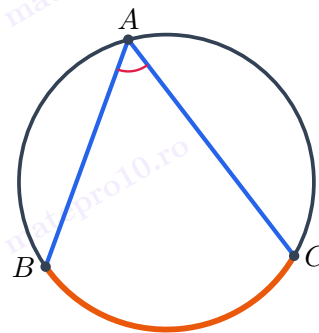


5. Unghiul înscris în cerc

Unghiul cu **vârful pe cerc** și ale cărui laturi sunt **două coarde** se numește **unghi înscris în cerc**.

Măsura unui unghi înscris este **jumătate** din măsura arcului cuprins între laturile sale:

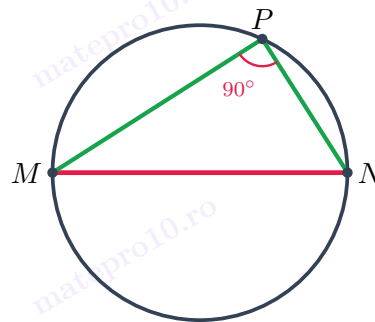
$$m(\widehat{BAC}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$$



6. Unghiul înscris în semicerc

Dacă MN este un **diametru** și P este un punct oarecare de pe cerc, unghiul $\widehat{MPN}$ se numește **unghi înscris în semicerc**.

$$m(\widehat{MPN}) = 90^\circ$$

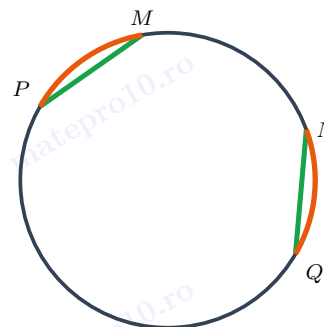


7. Teorema 1

Într-un cerc, **arcelor congruente le corespund coarde congruente**.

Dacă $\widehat{PM} = \widehat{NQ} \Rightarrow PM = NQ$

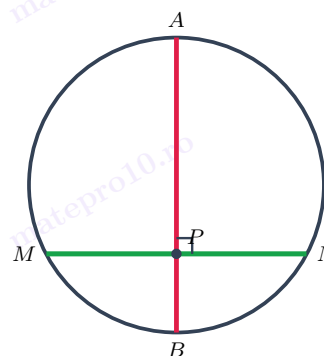
Reciproca: dacă $PM = NQ \Rightarrow \widehat{PM} = \widehat{NQ}$



8. Teorema 2

Într-un cerc, **diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei și prin mijlocul arcului subîntins de coardă**.

Fie AB diametru și $AB \perp MN \Rightarrow MP = PN$ și $\widehat{MB} = \widehat{BN}$



9. Teorema 3 (reciproca Teoremei 2)

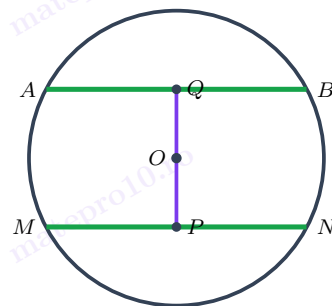
Dacă un **diametru** al unui cerc împarte o coardă în **două părți congruente**, atunci diametrul este **perpendicular** pe acea coardă.

$\Rightarrow$ Mediatoarea unei coarde trece prin centrul cercului.

10. Teorema 4

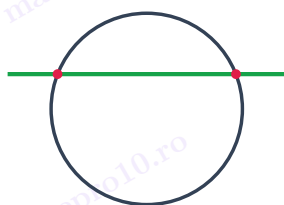
Două coarde ale unui cerc sunt **congruente** $\iff$ sunt **egal depărtate de centrul** cercului.

$$\text{Dacă } OQ = OP \Rightarrow AB = MN$$

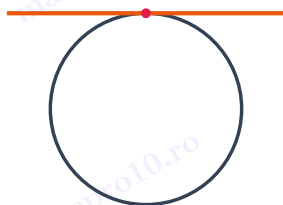


11. Pozițiile relative ale unei drepte față de cerc

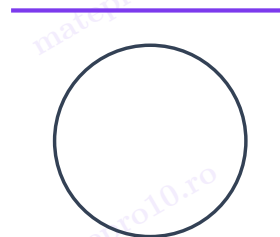
O dreaptă poate avea în comun cu un cerc:



SECANTĂ
exact 2 puncte



TANGENTĂ
un singur punct



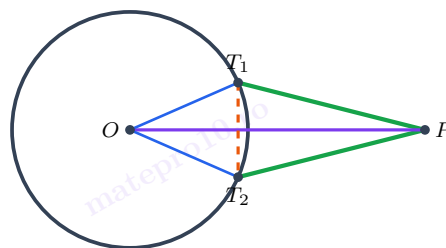
EXTERIOARĂ
niciun punct

Tangenta este perpendiculară pe rază în punctul de tangență.

12. Tangentele dintr-un punct exterior (teorema ciocului de rață)

Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce **două tangente**. Figura seamănă cu un cioc de rață — de aici numele teoremei.

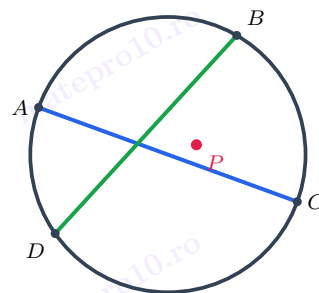
- $PT_1 = PT_2$ (segmentele de tangentă sunt egale)
- OP este **bisectoarea** unghiurilor $\widehat{T_1PT_2}$ și $\widehat{T_1OT_2}$
- OP este **mediatoarea** segmentului T_1T_2



13. Unghiul cu vârful în interiorul cercului

Un unghi cu vârful **în interiorul** cercului are măsura egală cu **semisuma** măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale și prelungirile lor.

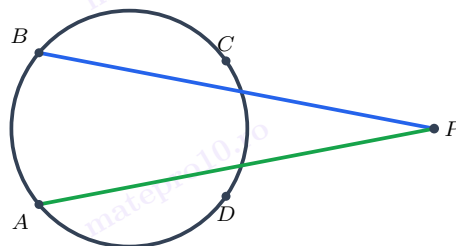
$$m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD})}{2}$$



14. Unghiul cu vârful în exteriorul cercului

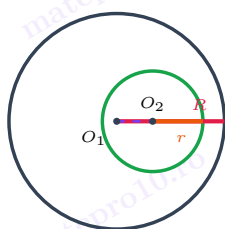
Un unghi cu vârful **în exteriorul** cercului are măsura egală cu **semidiferența** măsurilor arcelor cuprinse între laturile sale.

$$m(\widehat{BPA}) = \frac{m(\widehat{AB}) - m(\widehat{CD})}{2}$$



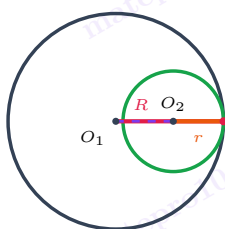
15. Pozițiile relative a două cercuri

Considerăm cercurile $C_1(O_1, R)$ și $C_2(O_2, r)$, unde $R > r$.



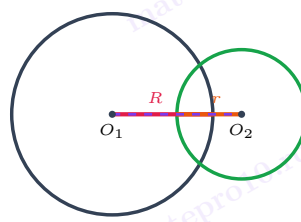
1. interioare

$$O_1O_2 < R - r$$



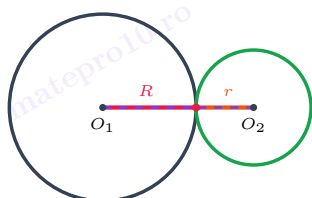
2. tangente int.

$$O_1O_2 = R - r$$



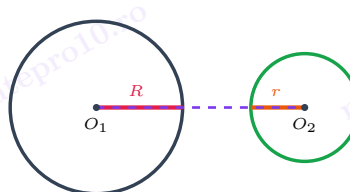
3. secante

$$R - r < O_1O_2 < R + r$$



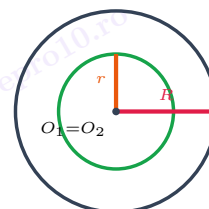
4. tangente ext.

$$O_1O_2 = R + r$$



5. exterioare

$$O_1O_2 > R + r$$

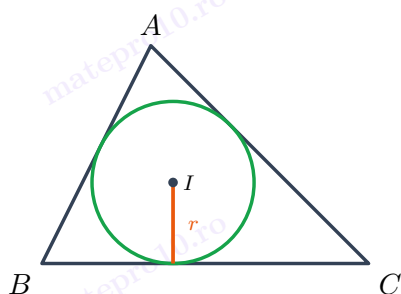


6. concentrice

$$O_1O_2 = 0$$

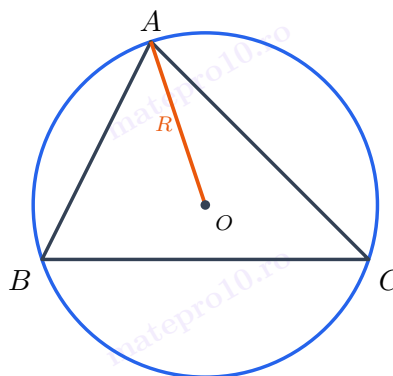
Linia punctată mov = distanța O_1O_2 dintre centre; razele sunt desenate pe aceeași linie, ca să se vadă relația.

16. Cerc înscris și cerc circumscris unui triunghi



Cerc **înscriș** = tangente fiecărei laturi.

$$r = \frac{A_{\triangle ABC}}{p} \quad p = \frac{AB + AC + BC}{2}$$



Cerc **circumscris** = trece prin toate vârfurile.

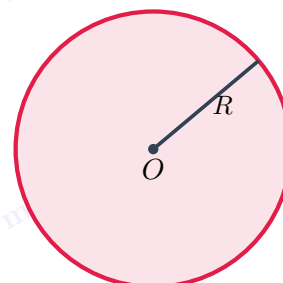
$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot A_{\triangle ABC}}$$

17. Lungimea cercului. Aria discului

Un cerc reunit cu interiorul său se numește **disc**.

$$L_{cerc} = 2\pi R \quad A_{disc} = \pi R^2$$

Numărul π este un **număr irațional**; aproximația lui la sutimi prin lipsă este $\pi \approx 3,14$.



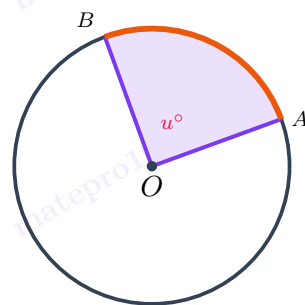
18. Lungimea arcului de cerc. Aria sectorului circular

Porțiunea din interiorul unui cerc cuprinsă între **două raze** se numește **sector de cerc** (sector circular).

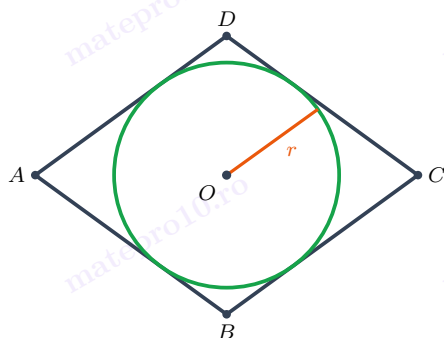
Lungimea arcului corespunzător unui unghi la centru de 1° este a 360-a parte din lungimea cercului: $\frac{2\pi R}{360^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$.

$$L_{\widehat{AB}} = 2\pi R \cdot \frac{u^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi R u}{180^\circ}$$

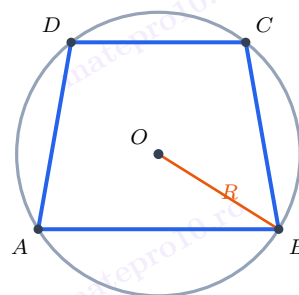
$$A_{\text{sector}} = \pi R^2 \cdot \frac{u^\circ}{360^\circ}$$



19. Cerc înscris și cerc circumscris unui patrulater



Un cerc **tangent fiecărei laturi** a unui patrulater = cerc **înscris** în patrulater.



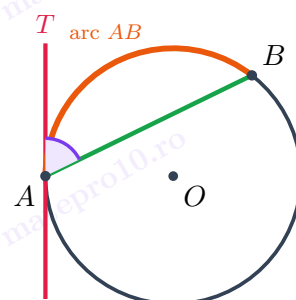
Cercul care trece prin **toate vârfurile** = cerc **circumscris**.

Patrulaterul înscris într-un cerc este un patrulater **convex**.

20. Unghiul format de o tangentă și o coardă

Măsura unghiului format de o **tangentă** și o **coardă** dusă din punctul de tangență este **jumătate** din măsura arcului cuprins între laturile sale.

$$m(\widehat{TAB}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2}$$



21. Patrulaterul inscriptibil

Un patrulater convex este **inscriptibil** dacă vârfurile lui sunt pe același cerc (are cerc circumscris).

Într-un patrulater inscriptibil, **unghiurile opuse sunt suplementare**: $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$
 $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$

Reciproc: dacă un patrulater convex are unghiurile opuse suplementare, atunci este inscriptibil.

