

Ecuații și sisteme de ecuații

Ecuația $x^2 = a \cdot ax + b = 0$ · Substituție · Reducere · Probleme

1. Ecuația $x^2 = a$

Aici sunt **două** soluții, nu una — pentru că și un număr, și opusul lui, au același pătrat.

$$x^2 = a \implies x = \sqrt{a} \text{ sau } x = -\sqrt{a}$$

Se scrie scurt $x = \pm\sqrt{a}$, iar mulțimea soluțiilor este $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Dacă $a > 0$	Dacă $a = 0$	Dacă $a < 0$
$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$ $S = \{-5, 5\}$	$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ $S = \{0\}$	$x^2 = -4$ $S = \emptyset$
$x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$	o singură soluție	un pătrat nu e negativ

2. Egalități echivalente. Identități

Două egalități sunt **echivalente** dacă au **exact aceleași soluții**. Trecem de la una la alta prin transformări permise.

Ce avem voie să facem

- să adunăm sau să scădem **același număr** în ambii membri;
- să înmulțim sau să împărțim ambii membri cu **același număr nenul**.

Identitate

O egalitate adevărată pentru **orice** valoare a literei.

$$2(x + 3) = 2x + 6$$

Ecuația, în schimb, e adevărată doar pentru anumite valori.

3. Ecuația de forma $ax + b = 0$

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0 \implies x = -\frac{b}{a}$$

Model de rezolvare

$$5x + 3 = 2x + 18$$

necunoscutele într-o parte, numerele în alta

$$5x - 2x = 18 - 3$$

$$3x = 15$$

$$x = 5, \quad S = \{5\}$$

Verificare: $5 \cdot 5 + 3 = 28$ și $2 \cdot 5 + 18 = 28$ ✓

Cazuri speciale

$a \neq 0 \rightarrow$ o singură soluție

$a = 0, b = 0 \rightarrow 0 = 0$, adevărat mereu,
 $S = \mathbb{R}$

$a = 0, b \neq 0 \rightarrow$ imposibil, $S = \emptyset$

4. Substituția auxiliară (notația)

Când o **aceeași expresie** se repetă, o notăm cu o literă nouă. Ecuația devine simplă, o rezolvăm, apoi revenim la necunoscuta inițială.

Trei pași: notez expresia care se repetă $\rightarrow$ rezolv ecuația simplă $\rightarrow$ revin la x .

Rezolvați $(2x - 1)^2 = 9$

1. Notăm $t = 2x - 1$. Ecuația devine $t^2 = 9$.

2. Rezolvăm: $t = 3$ sau $t = -3$.

3. Revenim la x : $2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ $2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$
 $S = \{-1, 2\}$

5. Sisteme de ecuații — metoda substituției

Scoatem o necunoscută dintr-o ecuație și o **înlocuim** în cealaltă. Rămâne o ecuație cu o singură necunoscută.

$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

1. Din prima ecuație scoatem x : $x = 11 - 2y$.

2. Înlocuim în a doua: $3(11 - 2y) - y = 5 \Rightarrow 33 - 6y - y = 5 \Rightarrow -7y = -28 \Rightarrow y = 4$.

3. Ne întoarcem: $x = 11 - 2 \cdot 4 = 11 - 8 = 3$.

$S = \{(3, 4)\}$ **Verificare:** $3 + 8 = 11$ ✓ $9 - 4 = 5$ ✓

6. Sisteme de ecuații — metoda reducerii

Aducem o necunoscută la coeficienți **opuși**, apoi adunăm ecuațiile — acea necunoscută dispare.

Când merge direct

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 5x - 3y = 19 \end{cases}$$

$+3y$ și $-3y$ sunt deja opuse — adunăm:

$$7x = 35 \Rightarrow x = 5$$

$$10 + 3y = 16 \Rightarrow y = 2$$

Când trebuie amplificat

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 & | \cdot 3 \\ 5x - 3y = 1 & | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 6y = 36 \\ 10x - 6y = 2 \end{cases}$$

$$19x = 38 \Rightarrow x = 2, y = 3$$

7. Substituția auxiliară la sisteme

Dacă necunoscutele apar **la numitor**, notăm fracțiile cu litere noi și obținem un sistem obișnuit.

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

- Notăm $a = \frac{1}{x}$ și $b = \frac{1}{y}$. Sistemul devine $\begin{cases} a + b = \frac{5}{6} \\ a - b = \frac{1}{6} \end{cases}$
- Adunăm ecuațiile: $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$, apoi $b = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.
- Revenim: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$, $\frac{1}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3$.

8. Probleme care se rezolvă cu ecuații

Rezolvarea se scrie mereu la fel, în 5 pași:

- Aleg necunoscuta — scriu clar ce înseamnă x .
- Exprim celelalte mărimi cu ajutorul lui x .
- Scriu ecuația, din condiția din enunț.
- Rezolv ecuația.
- Verific și scriu răspunsul **în cuvinte**.

Cum se traduce enunțul în matematică

Se spune	Se scrie	Se spune	Se scrie
un număr	x	suma lor	$x + y$
cu 5 mai mare	$x + 5$	diferența lor	$x - y$
cu 4 mai mic	$x - 4$	jumătatea lui	$\frac{x}{2}$
de 3 ori mai mare	$3x$	dublul lui	$2x$
de 3 ori mai mic	$\frac{x}{3}$	numărul următor	$x + 1$

Problema 1. Suma a două numere este 48, iar unul este cu 6 mai mare decât celălalt. Aflați numerele.

- $x =$ numărul mai mic
- celălalt număr $= x + 6$
- $x + (x + 6) = 48$
- $2x + 6 = 48 \Rightarrow 2x = 42 \Rightarrow x = 21$
- $21 + 27 = 48$ ✓

Răspuns: numerele sunt **21** și **27**.

Problema 2. Un tată are 38 de ani, iar fiul 10 ani. Peste câți ani tatăl va avea de 3 ori vârsta fiului?

- $x =$ numărul de ani care trec
- tatăl: $38 + x$, fiul: $10 + x$
- $38 + x = 3(10 + x)$
- $38 + x = 30 + 3x \Rightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$
- peste 4 ani: $42 = 3 \cdot 14$ ✓

Răspuns: peste **4 ani**.

Problema 3. Perimetrul unui dreptunghi este 46 cm, iar lungimea este cu 5 cm mai mare decât lățimea. Aflați dimensiunile.

1. $x = \text{lățimea (cm)}$

2. $\text{lungimea} = x + 5$

3. $2(x + (x + 5)) = 46$

4. $4x + 10 = 46 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$

5. $P = 2(9 + 14) = 46 \checkmark$

Răspuns: 9 cm și 14 cm.

9. Probleme care se rezolvă cu sisteme

Se folosesc când avem **două mărimi necunoscute** și **două informații** despre ele. Pașii sunt aceiași, doar că notăm două necunoscute.

Problema 4. Într-o clasă sunt 30 de elevi. Fetele sunt cu 4 mai multe decât băieții. Câte fete și câți băieți sunt?

1. $f = \text{numărul de fete}, b = \text{numărul de băieți}$

2.
$$\begin{cases} f + b = 30 \\ f - b = 4 \end{cases}$$

3. Adunăm ecuațiile: $2f = 34 \Rightarrow f = 17$

4. $b = 30 - 17 = 13$

5. $17 + 13 = 30 \checkmark$ și $17 - 13 = 4 \checkmark$

Răspuns: 17 fete și 13 băieți.

Problema 5. Trei caiete și două pixuri costă 31 de lei. Două caiete și cinci pixuri costă 39 de lei. Cât costă un caiet și cât un pix?

1. $c = \text{prețul unui caiet}, p = \text{prețul unui pix}$

2.
$$\begin{cases} 3c + 2p = 31 & | \cdot 5 \\ 2c + 5p = 39 & | \cdot 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 15c + 10p = 155 \\ 4c + 10p = 78 \end{cases} \quad \text{scădem: } 11c = 77$$

4. $c = 7$, apoi $21 + 2p = 31 \Rightarrow p = 5$

5. $3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 31 \checkmark$

Răspuns: caietul 7 lei, pixul 5 lei.

Greșelile care se repetă cel mai des

- Nu se scrie clar ce înseamnă x — apoi nu se mai știe ce s-a aflat la final.
- La schimbarea membrului nu se schimbă semnul.
- Se află x și se uită întrebarea reală (de exemplu se cere celălalt număr, nu x).
- Nu se face verificarea — deși ea prinde aproape orice greșeală de calcul.