

Medii

Aritmetică · Ponderată · Geometrică · Armonică · Inegalitatea mediilor

1. Media aritmetică

Este media pe care o folosim cel mai des: adunăm numerele și împărțim la câte sunt.

Pentru două numere

$$m_a = \frac{a + b}{2}$$

$$a = 6, b = 10 \Rightarrow m_a = \frac{16}{2} = 8$$

Pentru n numere

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\frac{7 + 8 + 9 + 12}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

2. Media aritmetică ponderată

Se folosește când un număr **nu se numără o singură dată**. Ponderea arată de câte ori intră acel număr în calcul.

Dacă nota 9 are ponderea 3, e **exact ca și cum am avea trei note de 9**:

$$\underbrace{9 + 9 + 9}_{\text{ponderea 3}} + \underbrace{7}_{\text{ponderea 1}} \rightarrow \text{în total 4 numere}$$

$$\frac{9 + 9 + 9 + 7}{4} = \frac{34}{4} = 8,5$$

Scris scurt, cele trei de 9 se strâng în $9 \cdot 3$ — și așa apare formula de mai jos.

$$m_p = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Sus: fiecare număr înmulțit cu ponderea lui. Jos: câte numere avem în total, adică suma ponderilor.

Exemplu — chiar media de la școală

La o materie cu teză, media orală se numără de **3** ori, iar teza **o** dată. Un elev are media orală 9 și teza 7:

$$m_p = \frac{9 \cdot 3 + 7 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{27 + 7}{4} = \frac{34}{4} = 8,5$$

Cu media aritmetică simplă ar fi ieșit $\frac{9 + 7}{2} = 8$, pentru că teza s-ar fi numărat o singură dată, la fel ca orală.

3. Media geometrică

Se calculează pentru numere **pozitive** și folosește radicalul în loc de împărțire.

$$m_g = \sqrt{a \cdot b}$$

$$a = 2, b = 8 \Rightarrow m_g = \sqrt{16} = 4$$

$$a = 3, b = 12 \Rightarrow m_g = \sqrt{36} = 6$$

O știi deja din geometrie!

Teorema înălțimii: înălțimea din unghiul drept este media geometrică a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

$$AD = \sqrt{BD \cdot DC}$$

4. Media armonică

Se obține din mediile inverselor. Apare la probleme cu **viteze** sau cu **ritmuri de lucru**.

$$m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

$$a = 2, b = 8 \Rightarrow m_h = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{32}{10} = 3,2$$

Dacă parcurgi un drum dus-întors, o dată cu viteza a și o dată cu viteza b , viteza medie pe tot drumul **nu** este media aritmetică, ci **media armonică**.

5. Inegalitatea mediilor

Pentru orice două numere **pozitive** a și b :

$$m_h \leq m_g \leq m_a$$

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Egalitatea are loc **doar** când $a = b$.

Verificăm pe numere: $a = 2, b = 8$

$$m_h = \frac{2 \cdot 2 \cdot 8}{10} = 3,2 \quad m_g = \sqrt{16} = 4 \quad m_a = \frac{10}{2} = 5$$

$$3,2 < 4 < 5 \quad \checkmark$$

De ce $m_g \leq m_a$? — se demonstrează în trei rânduri

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (\text{orice pătrat este pozitiv sau zero})$$

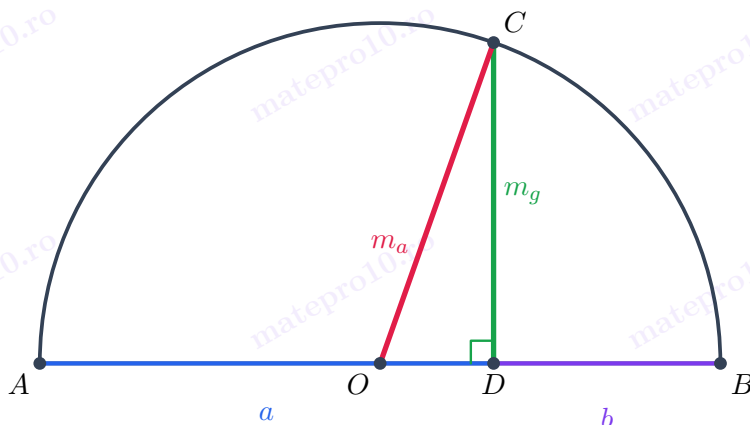
$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Iar egalitatea apare exact când $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, adică $a = b$.

6. Cum se văd mediile pe un desen

Desenăm un semicerc cu diametrul $AB = a + b$. Punctul D împarte diametrul în $AD = a$ și $DB = b$.



Raza OC este media aritmetică:

$$OC = R = \frac{a+b}{2} = m_a$$

Înălțimea CD este media geometrică:

$$CD = \sqrt{a \cdot b} = m_g$$

În triunghiul dreptunghic OCD , **ipotenusa OC este mereu mai mare decât cateta CD** . De aici se vede, pur și simplu, că

$$m_g \leq m_a$$

Iar când D ajunge chiar în O (adică $a = b$), cele două segmente coincid — atunci avem egalitate.

Recapitulare

Media	Formula (două numere)	Când o folosim
Aritmetică	$\frac{a+b}{2}$	numerele contează la fel
Ponderată	$\frac{a_1p_1 + \dots + a_np_n}{p_1 + \dots + p_n}$	numerele au importanță diferită
Geometrică	$\sqrt{ab}$	teorema înălțimii, proporții
Armonică	$\frac{2ab}{a+b}$	viteze, ritmuri de lucru