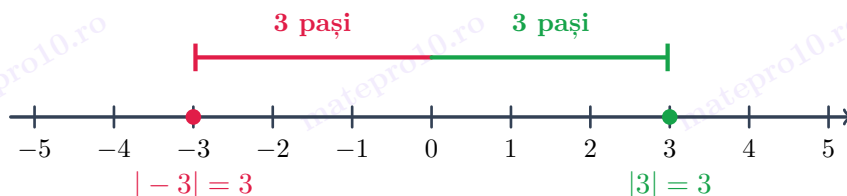


Modulul unui număr real

Definiție · Proprietăți · Explicarea modului

1. Ce este modulul

Modulul unui număr este **distanța** de la acel număr până la **0**, pe axa numerelor. Distanța nu are cum să fie negativă — de aceea modulul este **mereu pozitiv sau zero**.



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$$

Dacă numărul e **pozitiv**, îl las cum e. Dacă e **negativ**, îi schimb semnul.

Exemple: $|7| = 7$, $|-7| = 7$, $|0| = 0$, $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$.

2. Proprietăți

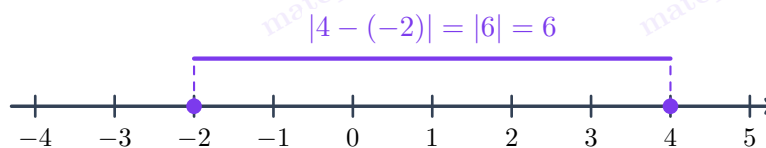
Proprietatea	Ce înseamnă
$ a \geq 0$	modulul nu e niciodată negativ
$ a = 0 \iff a = 0$	singurul număr cu modul 0 este 0
$ -a = a $	două numere opuse au același modul
$ a \cdot b = a \cdot b $	modulul „intră” peste înmulțire
$\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$	și peste împărțire ($b \neq 0$)
$\sqrt{a^2} = a $	legătura cu radicalii — de aici vine $ a $ când scoatem de sub radical

Atenție: modulul **NU** intră peste adunare: $|a + b| \neq |a| + |b|$
 $|3 + (-5)| = |-2| = 2$, dar $|3| + |-5| = 8$.

3. Modulul ca distanță între două numere

$$|a - b| = \text{distanța dintre } a \text{ și } b \text{ pe axă}$$

Nu contează ordinea: $|a - b| = |b - a|$.



4. Explicitarea modului (cu numere)

A **explicita** un modul înseamnă a-l scrie fără bare. Pentru asta trebuie să stabilim **semnul expresiei** de sub modul.

Pasul 1: compar numerele. **Pasul 2:** dacă expresia este **pozitivă**, o las neschimbată; dacă este **negativă**, îi schimb semnul.

Expresia	Comparăm	Semnul	Rezultatul
$ \sqrt{2} - 1 $	$\sqrt{2} \approx 1,41 > 1$	pozitiv	$\sqrt{2} - 1$
$ 1 - \sqrt{3} $	$\sqrt{3} \approx 1,73 > 1$	negativ	$\sqrt{3} - 1$
$ \sqrt{5} - 3 $	$\sqrt{5} \approx 2,23 < 3$	negativ	$3 - \sqrt{5}$
$ 2 - \sqrt{2} $	$\sqrt{2} \approx 1,41 < 2$	pozitiv	$2 - \sqrt{2}$

Exemplu rezolvat Calculați $E = |\sqrt{3} - 2| + |1 - \sqrt{3}|$.

1. $\sqrt{3} \approx 1,73 < 2$, deci $\sqrt{3} - 2$ e negativ:
 $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$

2. $1 < \sqrt{3}$, deci $1 - \sqrt{3}$ e negativ:
 $|1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$

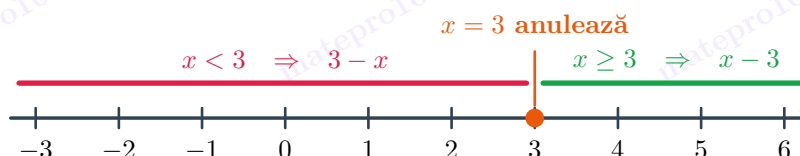
$$E = (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 = 1$$

Radicalii s-au redus — rezultatul e un număr întreg!

5. Explicitarea modului cu necunoscută

Când sub modul avem o **expresie cu variabilă**, semnul ei nu este cunoscut dinainte. Aflăm **valoarea variabilei pentru care expresia se anulează** și explicităm modulul **pe cazuri**.

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{dacă } x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ 3 - x, & \text{dacă } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$



Alte exemple

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2, & x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \\ -x - 2, & x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2 \end{cases}$$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x, & 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \\ x - 2, & 2 - x < 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

6. Ecuații cu modul

$$|x| = a \quad (a > 0) \implies x = a \text{ sau } x = -a$$

Două numere au același modul: cel pozitiv și opusul lui.

$$|x| = 5 \\ x = 5 \text{ sau } x = -5$$

$$|x - 2| = 3 \\ x - 2 = 3 \text{ sau } x - 2 = -3 \\ x = 5 \text{ sau } x = -1$$

$$|x| = -2 \\ \text{nu are soluții} \\ \text{modulul nu poate fi negativ}$$

De reținut

$$|a| \geq 0 \quad \sqrt{a^2} = |a| \quad |a - b| = \text{distanța dintre } a \text{ și } b$$

Ca să explicitezi un modul, răspunde mereu la o singură întrebare: **ce semn are expresia de sub modul?**

7. Două exerciții rezolvate

a) Calculați $E = |\sqrt{2} - 2| + |3 - \sqrt{2}| - |\sqrt{2} - 1|$.

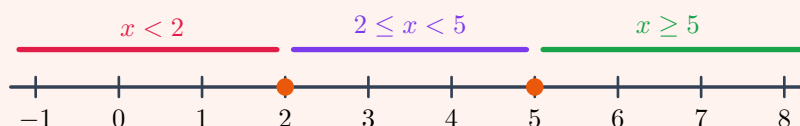
Știm că $\sqrt{2} \approx 1,41$. Stabilim semnul fiecărei paranteze:

$$\sqrt{2} - 2 < 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2} \quad 3 - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 > 0 \Rightarrow |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$$

$$E = (2 - \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 = 6 - 3\sqrt{2}$$

b) Explicitați $F = |x - 2| + |x - 5|$.

Avem **două** valori care anulează: $x = 2$ și $x = 5$. Ele împart axa în **trei zone**.



Zona	Cum se explicitează	Rezultatul
$x < 2$	$(2 - x) + (5 - x)$	$7 - 2x$
$2 \leq x < 5$	$(x - 2) + (5 - x)$	3
$x \geq 5$	$(x - 2) + (x - 5)$	$2x - 7$

Observă zona din mijloc: acolo F este **constant**, egal cu 3 — adică exact distanța dintre 2 și 5.