

Mulțimea numerelor reale

Numere iraționale · Radicali

1. Ce numere cunoaștem până acum?

Mulțimea	Ce conține	Exemple
$\mathbb{N}$	numerele naturale	0, 1, 2, 7, 25, 100
$\mathbb{Z}$	naturalele + cele negative	$\dots, -3, -1, 0, 5, 12$
$\mathbb{Q}$	numerele raționale — tot ce se poate scrie ca fracție $\frac{a}{b}$	$\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 2,5, 0,(3), 7$
$\mathbb{R}$	toate numerele de mai sus + cele iraționale	$\sqrt{2}, \pi, -\sqrt{5}, \sqrt[3]{7}$

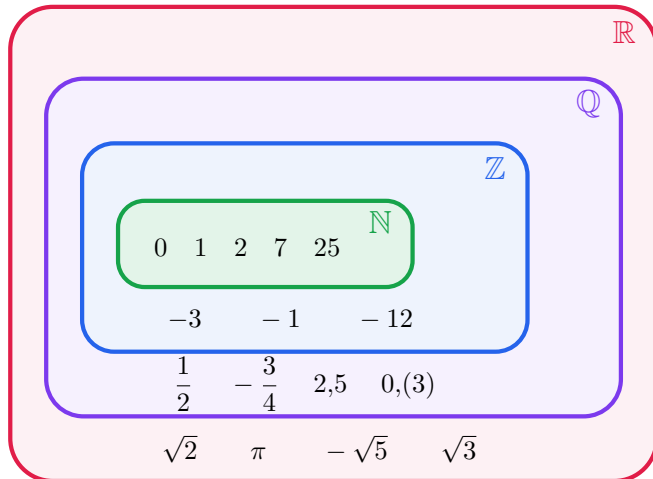
Un număr este **irațional** dacă **NU** se poate scrie ca fracție $\frac{a}{b}$, cu a, b numere întregi.

Scris ca zecimală, un număr irațional are o parte zecimală **infinită** și **fără perioadă**:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots \quad \pi = 3,14159265\dots$$

Notăm mulțimea numerelor iraționale cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

2. Cum se cuprind unele pe altele



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Fiecare mulțime este **cuprinsă** în următoarea.

Deci orice număr natural este și întreg, și rațional, și real. Dar **nu** invers: $\sqrt{2}$ este real, însă nu este rațional.

Pe axa numerelor — orice număr real are locul lui pe axă:



3. Rădăcina pătrată

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Dacă a este un număr **natural**, atunci pur și simplu $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple: $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{144} = 12$, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Pătratele perfecte — de învățat pe de rost:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

11^2	12^2	13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

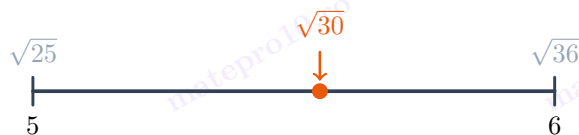
4. Estimarea unei rădăcini pătrate

Când numărul de sub radical **nu** este pătrat perfect, îl **încadrăm** între două pătrate perfecte vecine.

Exemplu: cât face aproximativ $\sqrt{30}$?

$$\begin{aligned} 25 &< 30 < 36 \\ \sqrt{25} &< \sqrt{30} < \sqrt{36} \\ 5 &< \sqrt{30} < 6 \end{aligned}$$

30 e mai aproape de 36, deci $\sqrt{30} \approx 5,5$.



Alte exemple: $3 < \sqrt{11} < 4$ (fiindcă $9 < 11 < 16$), $7 < \sqrt{60} < 8$ (fiindcă $49 < 60 < 64$).

5. Scoaterea factorilor de sub radical

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$$

Căutăm sub radical un **pătrat perfect** și îl scoatem afară cu rădăcina lui.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$$

Sfat: scoate **cel mai mare** pătrat perfect, ca să nu mai rămână nimic de scos.

$$\begin{aligned} \sqrt{72} &= \sqrt{4 \cdot 18} = 2\sqrt{18} \text{ — încă se poate} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2} \text{ — gata} \end{aligned}$$

6. Introducerea factorilor sub radical

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$$

Este **operația inversă**: numărul din față intră sub radical **ridicat la pătrat**.

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$2\sqrt{7} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{28}$$

La ce folosește: ca să **compari** două numere cu radical.

Cine e mai mare, $3\sqrt{2}$ sau $2\sqrt{5}$?

$$3\sqrt{2} = \sqrt{18}, \quad 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$$

$$18 < 20 \Rightarrow 3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$$

De reținut

scot afară → **extrag rădăcina**

bag înăuntru → **ridic la pătrat**

Capcana clasică

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Verifică: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, dar $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.

Radicalul „se desface” doar peste **înmulțire** și **împărțire**, niciodată peste adunare sau scădere.

Recapitulare — tot ce trebuie să știi din fișa asta

Ce fac	Formula
Mulțimile de numere	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Rădăcina pătrată a unui pătrat	$\sqrt{a^2} = a $
Scot un factor de sub radical	$\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$
Bag un factor sub radical	$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$
Estimez o rădăcină	$\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$

7. Exercițiu recapitulativ

Fii atent: felul unui număr **nu** se vede după cum e scris, ci după cât face **după simplificare**.

Se dă mulțimea

$$A = \left\{ -\frac{\sqrt{64}}{2}, \sqrt{49}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}, 3\sqrt{2} - \sqrt{18}, \frac{\sqrt{9}}{4}, -\sqrt{5}, \sqrt{12}, 0,(6), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

Determinați: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$.

Pasul 1 — aducem fiecare număr la forma lui cea mai simplă

Scris așa	Calculăm	Cât face	Ce fel de număr e
$-\frac{\sqrt{64}}{2}$	$-\frac{8}{2}$	-4	întreg negativ
$\sqrt{49}$	$\sqrt{7^2}$	7	natural
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	$\sqrt{16}$	4	natural
$3\sqrt{2} - \sqrt{18}$	$3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$	0	natural
$\frac{\sqrt{9}}{4}$	$\frac{3}{4}$	0,75	rațional (nu e întreg)
$-\sqrt{5}$	5 nu e pătrat perfect	-2,236...	irațional
$\sqrt{12}$	$2\sqrt{3}$	3,464...	irațional
0,(6)	$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	rațional (nu e întreg)
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,707...	irațional

Pasul 2 — răspunsurile

$$A \cap \mathbb{N} = \{0, 4, 7\}$$

doar cele care au ieșit numere naturale

$$A \cap \mathbb{Z} = \{-4, 0, 4, 7\}$$

naturalele de mai sus + întregul negativ

$$A \cap \mathbb{Q} = \left\{ -4, 0, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 4, 7 \right\}$$

întregii + fracțiile

$$A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \left\{ -\sqrt{5}, \sqrt{12}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

cele care nu se pot scrie ca fracție

$$A \cap \mathbb{R} = A$$

toate! orice număr din A este real