

Calcul algebric în $\mathbb{R}$ (II)

Descompuneri în factori · ecuația de gradul al doilea · Clasa a VIII-a

A descompune în factori înseamnă a scrie o sumă ca un **produs**. E operația inversă desfacerii parantezelor — și e cheia rezolvării ecuațiilor de gradul al doilea.

1. Metoda 1: factorul comun

Cauți ce apare **în fiecare termen** și îl scoți în față. La coeficiențiiiei c.m.m.d.c., la litereiei puterea **cea mai mică**.

Exemplu. $6x^2 + 9x$

Coeficienții 6 și 9 au c.m.m.d.c. = 3. Litera x apare la puterile 2 și 1, deci iau x^1 . Factorul comun este $3x$:

$$6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$$

Verificarea e imediată: desfăci paranteza înapoi. $3x \cdot 2x = 6x^2$ și $3x \cdot 3 = 9x$. ✓

2. Metoda 2: gruparea termenilor

Când nu există un factor comun pentru toți, grupezi termenii câte doi.

Exemplu. $ax + ay + bx + by$

$$= \underbrace{(ax + ay)}_{a(x+y)} + \underbrace{(bx + by)}_{b(x+y)} = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

După ce ai grupat, trebuie să apară **aceeași paranteză** de două ori. Dacă nu apare, ai grupat greșit — încearcă altă combinație.

3. Regula sumei și a produsului

Pentru un trinom de forma $x^2 + bx + c$, căutăm **două numere** care:

- **adunate** dau coeficientul lui x , adică b
- **înmulțite** dau termenul liber, adică c

Dacă acele numere sunt m și n , atunci

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

Exemplu. Descompune $x^2 + 7x + 12$.

Căutăm două numere cu **suma 7** și **produsul 12**. Le luăm pe rând perechile care dau 12: $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$. Suma 7 o dă perechea 4 și 3.

Cu ele **despărțim** termenul din mijloc și grupăm:

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 7x + 12 \\
 &= x^2 + 4x + 3x + 12 \quad (\text{am scris } 7x = 4x + 3x) \\
 &= x(x + 4) + 3(x + 4) \quad (\text{factor comun în fiecare grupă}) \\
 &= (x + 4)(x + 3) \quad (\text{factor comun } (x + 4))
 \end{aligned}$$

Verificare: $(x + 4)(x + 3) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$ ✓

Cum stabilești semnele: dacă produsul c este **pozitiv**, cele două numere au **același semn** — dat de semnul lui b . Dacă c este **negativ**, numerele au **semne diferite**.

$x^2 - 5x + 6$: produs $+6$, sumă $-5 \Rightarrow$ amândouă negative: -2 și -3 .

$x^2 - x - 6$: produs $-6 \Rightarrow$ semne diferite: 2 și -3 .

De ce funcționează regula: cele două numere găsite sunt exact cele care **despart** termenul din mijloc astfel încât gruparea să dea aceeași paranteză de două ori. Odată ce te obișnuiești, sari peste pașii intermediari și scrii direct rezultatul.

4. Metoda 3: formulele de calcul prescurtat

Aceleași formule, citite **de la dreapta la stânga**.

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\
 a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\
 a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2
 \end{aligned}$$

diferență de pătrate
pătrat perfect
pătrat perfect

$$x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4) \qquad x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

Cum recunoști un pătrat perfect: primul și ultimul termen sunt pătrate, iar cel din mijloc este dublul produsului rădăcinilor lor. La $x^2 + 10x + 25$: $\sqrt{x^2} = x$, $\sqrt{25} = 5$, iar $2 \cdot x \cdot 5 = 10x$. ✓

5. Ecuația de gradul al doilea

O ecuație de forma $ax^2 + bx + c = 0$ se rezolvă **descompunând în factori** și folosind regula produsului nul.

Regula produsului nul: un produs este zero **doar dacă** cel puțin unul dintre factori este zero.

$$A \cdot B = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 0 \text{ sau } B = 0$$

Cazul 1 — lipsește termenul liber. $x^2 - 3x = 0$

$$x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

Cazul 2 — diferență de pătrate. $2x^2 - 8 = 0$

$$2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$$

Cazul 3 — pătrat perfect. $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Aici există o **singură** soluție, numită soluție dublă — cei doi factori sunt identici.

Cazul 4 — trinom. $x^2 - 5x + 6 = 0$

Căutăm două numere cu **produsul 6** și **suma -5**. Sunt -2 și -3:

$$(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 3$$

Proba se face întotdeauna. Pentru $x = 2$: $4 - 10 + 6 = 0$ ✓ Pentru $x = 3$: $9 - 15 + 6 = 0$ ✓

Greșeala clasică: din $x^2 = 9$ se scrie doar $x = 3$. Corect este $x = 3$ **sau** $x = -3$, pentru că și $(-3)^2 = 9$. O ecuație de gradul al doilea are, de regulă, **două** soluții.

6. Extindere: rezolvarea cu discriminantul

Notă. Metoda de mai jos **nu este în programa de clasa a VIII-a** — programa cere rezolvarea prin descompunere în factori. Discriminantul se studiază în clasa a IX-a. Îl prezentăm aici pentru că rezolvă **orice** ecuație de gradul al doilea, inclusiv pe cele care nu se descompun ușor.

Pentru ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a \neq 0$, se calculează **discriminantul**:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Semnul lui Δ spune **câte soluții** are ecuația.

$$\Delta > 0$$

Două soluții distincte

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = 0$$

O soluție dublă

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta < 0$$

Nicio soluție reală

$\sqrt{\Delta}$ nu există în $\mathbb{R}$.

Cazul $\Delta > 0$. $2x^2 - 7x + 3 = 0$, cu $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$.

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$$

$$x_1 = \frac{7 + 5}{4} = 3 \quad x_2 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

Cazul $\Delta = 0$. $x^2 - 6x + 9 = 0$: $\Delta = 36 - 36 = 0$, deci $x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$.

Cazul $\Delta < 0$. $x^2 + x + 1 = 0$: $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, deci ecuația **nu are soluții reale**.

7. Descompunerea cu ajutorul soluțiilor

Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, atunci trinomialul se descompune astfel:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Atenție la coeficientul a din față — se uită cel mai des.

Exemplu. Pentru $2x^2 - 7x + 3$, am găsit $x_1 = 3$ și $x_2 = \frac{1}{2}$:

$$2x^2 - 7x + 3 = 2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Forma aceasta e corectă, dar are un numitor. **Introducem factorul 2 în paranteza cu fracția** și scăpăm de el:

$$= (x - 3) \cdot 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{mutăm 2 lângă a doua paranteză})$$

$$= (x - 3)(2x - 1) \quad (2 \cdot x = 2x, 2 \cdot \frac{1}{2} = 1)$$

Verificare: $(x - 3)(2x - 1) = 2x^2 - x - 6x + 3 = 2x^2 - 7x + 3$ ✓

Regula practică: când o soluție este fracție, **introdu coeficientul a în paranteza acelei soluții**. Obții o descompunere cu numere întregi, mult mai comodă de folosit mai departe.

Cele două metode dau același rezultat. La $x^2 - 5x + 6$: prin sumă și produs găsim $(x - 2)(x - 3)$; prin discriminant, $\Delta = 25 - 24 = 1$, deci $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$, adică 3 și 2 — aceleași soluții.

Alege metoda după situație: dacă numerele se văd repede, folosește suma și produsul. Dacă nu, discriminantul funcționează întotdeauna.

De reținut

Descompunerea se încearcă **în ordinea aceasta**: întâi factor comun, apoi formulele, apoi gruparea.

O ecuație de gradul al doilea se rezolvă aducând totul în stânga, descompunând în factori și punând **fiecare factor egal cu zero**.

Verifică orice descompunere **desfăcând parantezele înapoi**. Dacă nu iese expresia inițială, ai greșit undeva.

La trinomial $x^2 + bx + c$, caută două numere cu **suma b și produsul c** . Dacă nu le găsești, calculează $\Delta = b^2 - 4ac$.