

Frații algebrice

Condiții de existență · operații · ecuații · Clasa a VIII-a

O **fracție algebrică** este un raport de două expresii cu litere, de forma $\frac{A}{B}$, unde B nu este identic nul. Regulile de calcul sunt **aceleași** ca la fracțiile obișnuite — se adaugă doar grija pentru numitor.

1. Condiții de existență

Condiția de existență

Fracția $\frac{A}{B}$ are sens **doar dacă** $B \neq 0$.

Valorile care anulează numitorul se **scot** din mulțimea numerelor reale:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{valorile interzise}\}$$

Exemplu. Pentru $\frac{x+1}{x-2}$ punem $x-2 \neq 0$, deci $x \neq 2$. Scriem $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Pentru $\frac{3}{x^2-9}$ descompunem numitorul: $x^2-9 = (x-3)(x+3)$. Se anulează pentru $x=3$ și $x=-3$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

Pentru $\frac{5}{x^2+1}$ numitorul **nu se anulează niciodată**, deci $x \in \mathbb{R}$ — nicio restricție.

Condițiile se pun pe numitorul inițial, nu pe cel simplificat. Dacă simplifici întâi și abia apoi pui condiții, pierzi valori interzise.

2. Simplificarea

Ca să simplifici, ai nevoie de **produse**, nu de sume. Deci mai întâi **descompui în factori** numărătorul și numitorul, apoi tai factorii comuni.

Exemplu. $\frac{x^2-4}{x+2}$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2$$

Exemplu. $\frac{x^2-9}{x^2+6x+9}$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$$= \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}$$

Greșeala cea mai gravă: nu se taie termeni dintr-o sumă.

$$\frac{x+3}{3} \neq x \qquad \frac{x^2+4}{4} \neq x^2$$

Se taie doar **factori**, adică ce e legat prin înmulțire.

3. Adunarea și scăderea

Ca la fracțiile obișnuite: aduci la **același numitor**, apoi aduni numărătorii. Numitorul comun se găsește **descompunând** numitorii.

Exemplu simplu. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.
Numitor comun: $x(x+1)$.

$$= \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

Exemplu cu descompunere. $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

Descompunem al doilea numitor: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$, deci $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Numitorul comun este chiar $(x-2)(x+2)$:

$$= \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x^2-4}$$

4. Înmulțirea, împărțirea și puterea

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D} \qquad \frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \qquad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

Înmulțire. $\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ — s-a simplificat $(x+1)$.

Împărțire. $\frac{x}{x+2} : \frac{x^2}{x+2} = \frac{x}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x^2} = \frac{1}{x}$

La împărțire apare o condiție în plus: și numărătorul celei de-a doua fracții trebuie să fie nenul, pentru că ajunge la numitor după răsturnare. Aici: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

5. Ecuații cu fracții algebrice

Cei patru pași: pui condițiile, înmulțești tot cu numitorul comun, rezolvi ecuația obținută, apoi **verifici dacă soluțiile respectă condițiile**.

Exemplu 1. $\frac{x+1}{x-2} = 3$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Înmulțim cu $(x-2)$:

$$x+1 = 3(x-2) \Rightarrow x+1 = 3x-6 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$\frac{7}{2} \neq 2$, deci soluția e bună. **Proba:** $\frac{9/2}{3/2} = 3$ ✓

Exemplu 2 — duce la gradul al doilea. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{5}{6}$, cu $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Adunăm în stânga: $\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{5}{6}$. Înmulțim în cruce:

$$6(2x+1) = 5(x^2+x) \Rightarrow 12x+6 = 5x^2+5x \Rightarrow 5x^2-7x-6=0$$

$\Delta = 49 + 120 = 169$, $\sqrt{\Delta} = 13$, deci $x_{1,2} = \frac{7 \pm 13}{10}$:

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -\frac{3}{5}$$

Amândouă respectă condițiile. **Proba pentru $x = 2$:** $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ✓

Verificarea condițiilor nu e opțională. Dacă o soluție anulează un numitor, ea **se elimină** — nu e soluție, oricât de corect ai calculat.

De reținut

Condițiile se pun primele, pe numitorii inițiali, descompuși în factori, și se scriu ca $x \in \mathbb{R} \setminus \{\dots\}$.

Simplificarea cere descompunere — se taie factori, niciodată termeni dintr-o sumă.

La ecuații, **scapi de numitori** înmulțind cu numitorul comun, iar la final verifici că soluțiile respectă condițiile.