

Funcții

Reperul cartezian · graficul · $f(x) = ax + b$ · Clasa a VIII-a

O **funcție** este o regulă care asociază **fiecărui** element dintr-o mulțime D **exact un** element dintr-o mulțime E . Se notează $f: D \rightarrow E$.

D se numește **domeniu de definiție**, iar E **codomeniu**.

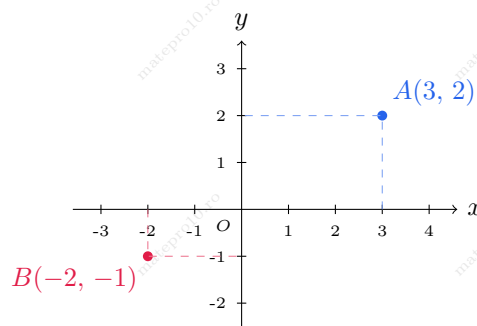
1. Produsul cartezian și reperul

Produsul cartezian $A \times B$ este mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in A$ și $b \in B$.

Pentru $A = \{1, 2\}$ și $B = \{3, 4, 5\}$: $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ — șase perechi.

Ordinea contează! $(1, 3)$ și $(3, 1)$ sunt perechi **diferite**. De aceea se numesc perechi **ordonate**.

Într-un **reper cartezian** — două axe perpendiculare — orice pereche (x, y) devine un punct. x se numește **abscisă**, y se numește **ordonată**.



2. Distanța dintre două puncte

Distanța dintre două puncte

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

E **teorema lui Pitagora** aplicată triunghiului dreptunghic format de diferențele de coordonate.

Exemplu. $A(1, 2)$ și $B(4, 6)$:

$$AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ordinea scăderii **nu** contează: $(4 - 1)^2$ și $(1 - 4)^2$ dau amândouă 9, pentru că se ridică la pătrat.

3. Cele trei feluri de a da o funcție

1. **Prin diagramă** — săgeți de la fiecare element al domeniului către imaginea lui.
2. **Prin tabel** — două rânduri, valorile lui x și valorile lui $f(x)$.
3. **Prin formulă** — regula scrisă, de exemplu $f(x) = 2x - 3$.

Exemplu. Fie $f : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$. Tabelul de valori:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	-5	-3	-1	1

Fiecare valoare se obține înlocuind: $f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$.

Condiția esențială: fiecare element din domeniu trebuie să aibă **exact o** imagine. Nici zero, nici două. Dacă un element are două săgeți, **nu** este funcție.

4. Graficul unei funcții

Graficul funcției f este mulțimea tuturor punctelor de coordonate $(x, f(x))$, cu x din domeniu.

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Dacă domeniul e o **mulțime finită**, graficul e format din **puncte izolate**. Dacă domeniul e $\mathbb{R}$ sau un interval, graficul funcției $f(x) = ax + b$ este o **dreaptă**.

Un punct aparține graficului

$$P(x_0, y_0) \in G_f \iff f(x_0) = y_0$$

Înlocuiești abscisa în formulă și compari rezultatul cu ordonata.

$P(4, 5)$ și $f(x) = 2x - 3$: $f(4) = 8 - 3 = 5$ ✓ deci $P \in G_f$.
 $Q(4, 6)$: $f(4) = 5 \neq 6$ ✗ deci $Q \notin G_f$.

5. Funcția $f(x) = ax + b$

Graficul este o **dreaptă**. Ca s-o desenezi, îți sunt de ajuns **două puncte** — cel mai comod, intersecțiile cu axele.

Intersecțiile cu axele

cu Oy : calculezi $f(0) \Rightarrow$ punctul $(0, f(0))$

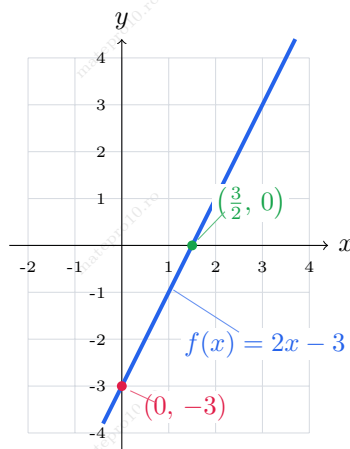
cu Ox : rezolvi $f(x) = 0 \Rightarrow$ punctul $(x_0, 0)$

Pentru $f(x) = ax + b$ acestea devin $f(0) = b$ și $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Exemplu. $f(x) = 2x - 3$.

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \qquad f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}$$

Punctele sunt $(0, -3)$ și $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.



Semnul lui a spune încotro merge dreapta:

$a > 0 \Rightarrow$ funcția **crește**, dreapta urcă de la stânga la dreapta.

$a < 0 \Rightarrow$ funcția **scade**, dreapta coboară.

b arată unde taie dreapta axa Oy .

6. Intersecția a două grafice

Punctul de intersecție a două grafice

Rezolvi $f(x) = g(x) \Rightarrow$ obții x_0

Apoi calculezi $y_0 = f(x_0)$. Punctul este (x_0, y_0) .

Exemplu. $f(x) = 2x - 3$ și $g(x) = -x + 3$.

$$2x - 3 = -x + 3 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$y_0 = f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 \qquad \text{Punctul de intersecție: } (2, 1)$$

Proba se face în ambele funcții: $f(2) = 1$ și $g(2) = -2 + 3 = 1$. Aceeași valoare, deci punctul se află pe amândouă graficele. ✓

7. Aflarea funcției din două puncte

Funcția $f(x) = ax + b$ care trece prin $A(x_1, y_1)$ și $B(x_2, y_2)$

Se rezolvă sistemul
$$\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases} \quad \text{cu necunoscutele } a \text{ și } b.$$

Exemplu. Află funcția al cărei grafic trece prin $A(1, 5)$ și $B(3, 11)$.

Fiecare punct trebuie să verifice formula, deci:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 5 \\ a \cdot 3 + b = 11 \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} a + b = 5 \\ 3a + b = 11 \end{cases}$$

Scădem prima ecuație din a doua — b se elimină:

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 3 + b = 5 \Rightarrow b = 2$$

$$f(x) = 3x + 2$$

Proba în ambele puncte: $f(1) = 3 + 2 = 5$ ✓ $f(3) = 9 + 2 = 11$ ✓

8. Arii și distanțe în reper

Dreapta, împreună cu axele, încheie un **triunghi dreptunghic** cu vârful în origine. Catetele sunt distanțele de la O până la cele două intersecții.

Aria triunghiului format de grafic cu axele

cu punctele $A(x_0, 0)$ și $B(0, y_0)$: $\mathcal{A} = \frac{|x_0| \cdot |y_0|}{2}$

cu coeficienții, pentru $f(x) = ax + b$: $\mathcal{A} = \frac{b^2}{2|a|}$

catetele sunt $|b|$ și $\frac{|b|}{|a|}$, iar $\frac{|b|}{|a|} \cdot |b| : 2 = \frac{b^2}{2|a|}$

Exemplu. Pentru $f(x) = 2x - 3$, cu intersecțiile $A(\frac{3}{2}, 0)$ și $B(0, -3)$: $\mathcal{A} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$.

Cu a doua formulă: $\frac{(-3)^2}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4}$ — același rezultat.

Se iau modulele! Coordonatele pot fi negative, dar o **lungime** nu — aici ordonata este -3 , iar cateta măsoară 3 .

Distanța dintre intersecții e ipotenuza aceluiași triunghi: $AB = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

9. Lecturi grafice

Dintr-un grafic dat se citesc direct: **valoarea** $f(x)$ pentru un x dat (urci de pe Ox până la grafic, apoi mergi spre Oy), **pentru ce** x funcția ia o valoare dată (invers), **unde funcția e pozitivă, negativă sau zero**, și dacă **crește sau scade**.

De reținut

O funcție dă **fiecărui** element din domeniu **exact o** imagine. Graficul lui $f(x) = ax + b$ e o **dreaptă** — două puncte sunt de ajuns, cele mai comode fiind intersecțiile cu axele.

Un punct aparține graficului **doar dacă** verifică formula: $f(x_0) = y_0$. **Intersecția a două grafice** se află rezolvând $f(x) = g(x)$, iar **funcția din două puncte** rezolvând un sistem. La **arii**, catetele se iau în modul.