

Perpendicularitate în spațiu (I)

Dreaptă perpendiculară pe plan · distanțe · proiecții · Clasa a VIII-a

În spațiu, o dreaptă poate fi perpendiculară pe **un plan întreg**, nu doar pe altă dreaptă. Din această noțiune ies toate distanțele și toate înălțimile corpurilor.

1. Unghiul a două drepte în spațiu

Dacă dreptele sunt **concurente**, unghiul lor se măsoară direct.

Dacă sunt **necoplanare**, duci printr-un punct oarecare paralele la amândouă și măsoară unghiul dintre ele. Rezultatul **nu depinde** de punctul ales.

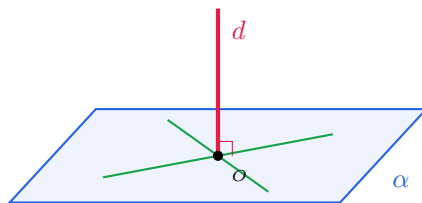
Două drepte necoplanare se numesc **perpendiculare** dacă unghiul astfel obținut are 90° . **Nu e nevoie să se intersecteze** ca să fie perpendiculare.

2. Dreaptă perpendiculară pe plan

Criteriul de perpendicularitate dreaptă–plan

Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe **două drepte concurente** din planul α , atunci $d \perp \alpha$.

Două drepte concurente, nu oricare două! Dacă d e perpendiculară pe două drepte **paralele** din plan, concluzia **nu** se poate trage.



Odată stabilit că $d \perp \alpha$, dreapta d este perpendiculară pe **orice** dreaptă din plan care trece prin O — și, de fapt, pe orice dreaptă din plan.

3. Distanța de la un punct la un plan

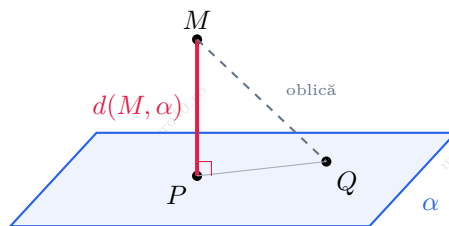
Distanța de la punctul M la planul α

Este lungimea **segmentului perpendicular** dus din M pe plan.

$$d(M, \alpha) = MP, \text{ unde } MP \perp \alpha, P \in \alpha$$

Punctul P se numește **piciorul perpendicularei**, iar MP este **cea mai scurtă** distanță de

la M la orice punct al planului. Orice alt segment MQ , cu $Q \in \alpha$, este mai lung — se numește **oblică**.



4. Înălțimile corpurilor

Înălțimea piramidei este distanța de la vârf la planul bazei. La piramida **regulată**, piciorul ei cade în **centrul bazei**.

Înălțimea prisme drepte este distanța dintre planele bazelor și e egală cu **muchia laterală**.

Distanța dintre două plane paralele este lungimea oricărui segment perpendicular pe amândouă.

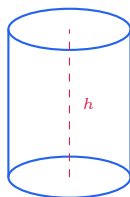
La **prisma dreaptă**, muchia laterală e perpendiculară pe baze, deci înălțimea coincide cu ea. La o prismă **oblică** nu mai e așa — înălțimea e mai mică decât muchia.

5. Corpurile rotunde

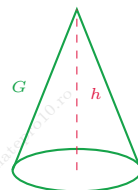
Cilindrul circular drept se obține rotind un **dreptunghi** în jurul unei laturi. Are două baze cercuri congruente, iar înălțimea e distanța dintre planele lor.

Conul circular drept se obține rotind un **triunghi dreptunghic** în jurul unei catete. Are o bază cerc, un vârf, o **generatoare** G și înălțimea h din vârf în centrul bazei.

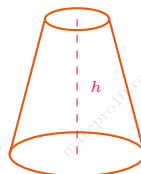
Trunchiul de con se obține tăind conul cu un plan paralel cu baza.



cilindru



con



trunchi de con

Secțiunea paralelă cu baza este, la toate trei, un **cerc**. La cilindru are aceeași rază ca bazele; la con și la trunchi, o rază mai mică.

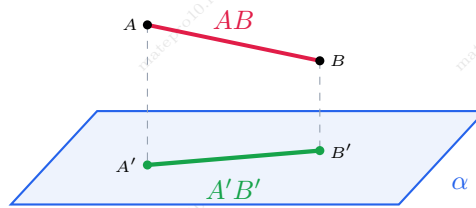
6. Proiecții ortogonale pe un plan

Proiecția unui punct pe un plan

Este **piciorul perpendicularei** duse din acel punct pe plan.

Proiecția unui segment pe un plan este segmentul determinat de proiecțiile capetelor. **Proiecția unei drepte** este, de regulă, tot o dreaptă.

Excepție: dacă dreapta e **perpendiculară** pe plan, proiecția ei este un **singur punct**.



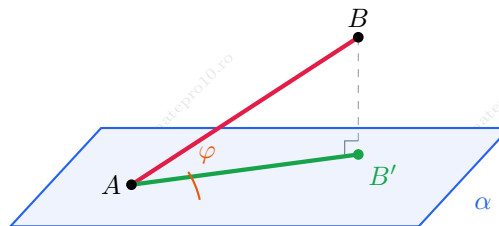
Proiecția e **mai scurtă** decât segmentul, cu excepția cazului în care segmentul e paralel cu planul — atunci sunt egale.

7. Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Este unghiul dintre **dreaptă** și **proiecția ei** pe plan.

Dacă dreapta e **paralelă** cu planul sau inclusă în el, unghiul este 0° . Dacă e **perpendiculară** pe plan, unghiul este 90° . În rest, unghiul e cuprins între aceste valori.



Unghiul $\varphi = \angle BAB'$ este unghiul dintre dreapta AB și planul α . Triunghiul ABB' este **dreptunghic** în B' .

Lungimea proiecției unui segment

$$AB' = AB \cdot \cos \varphi \quad \text{unde } \varphi \text{ este unghiul cu planul}$$

Din același triunghi dreptunghic se obține și distanța de la B la plan: $BB' = AB \cdot \sin \varphi$.

Exemplu. Segmentul $AB = 10$ cm face cu planul un unghi de 60° .

Proiecția: $AB' = 10 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ cm

Distanța de la B la plan: $BB' = 10 \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm

Verificare cu Pitagora: $5^2 + (5\sqrt{3})^2 = 25 + 75 = 100 = 10^2$ ✓

Cazurile limită confirmă formula: la $\varphi = 0^\circ$, $\cos 0^\circ = 1$, deci proiecția e egală cu segmentul. La $\varphi = 90^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$, deci proiecția se reduce la un punct.

De reținut

Ca să arăți că o dreaptă e perpendiculară pe un plan, îți trebuie **două drepte concurente** din plan pe care să fie perpendiculară.

Distanța de la un punct la un plan se măsoară **pe perpendiculară** — orice altă cale e mai lungă.

Proiecția unui punct e piciorul perpendicularei. Toate înălțimile corpurilor sunt, de fapt, distanțe de la un punct la un plan.

Unghiul dintre o dreaptă și un plan se măsoară față de **proiecția** dreptei, iar lungimea proiecției este $AB \cdot \cos \varphi$.