

Perpendicularitate în spațiu (II)

Diedru · teorema celor trei perpendiculare · Clasa a VIII-a

Aici se adaugă **unghiul dintre două plane** și teorema care rezolvă majoritatea problemelor de distanțe în corpuri: **teorema celor trei perpendiculare**.

1. Diedrul

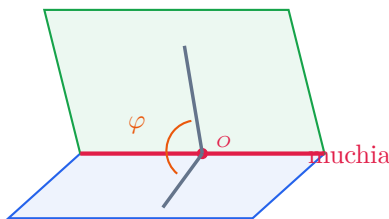
Un **diedru** este figura formată de **două semiplane** care pornesc din aceeași dreaptă. Dreapta se numește **muchia** diedrului, iar semiplanele sunt **fețele** lui.

Gândește-te la o carte deschisă: cotorul e muchia, copertile sunt fețele.

Unghiul plan corespunzător unui diedru

Se alege un punct pe muchie și se duc, **în fiecare față**, câte o perpendiculară pe muchie.

Unghiul dintre aceste două perpendiculare este **unghiul plan al diedrului**.



Cele două perpendiculare pornesc din același punct de pe muchie, câte una în fiecare față. Dacă pornesc din puncte diferite, unghiul obținut nu e cel al diedrului.

2. Unghiul a două plane. Plane perpendiculare

Unghiul a două plane secante este măsura unghiului plan al diedrului pe care îl formează.

Două plane se numesc **perpendiculare** dacă unghiul dintre ele este de 90° . Se scrie $\alpha \perp \beta$.

Criteriu de perpendicularitate plan-plan

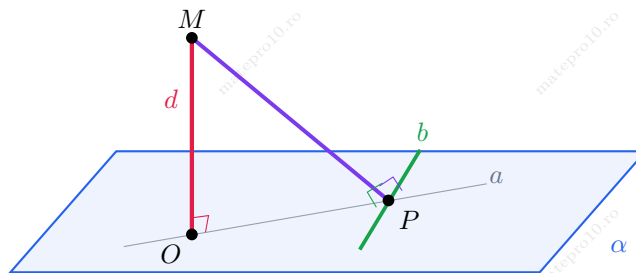
Dacă un plan conține o **dreaptă perpendiculară** pe alt plan, atunci cele două plane sunt **perpendiculare**.

Exemplu practic: într-o prismă dreaptă, orice față laterală e perpendiculară pe planul bazei, pentru că fața conține muchia laterală, care e perpendiculară pe bază.

3. Teorema celor trei perpendiculare

Teorema celor trei perpendiculare

Dacă o dreaptă d este **perpendiculară pe un plan** α și prin piciorul ei trece o dreaptă a , conținută în plan, **perpendiculară pe o altă dreaptă** b din plan, atunci dreapta care unește **orice punct** M al lui d cu **punctul de intersecție** P al dreptelor a și b este perpendiculară pe b .



Ipotezele, pe scurt: $d \perp \alpha$, $d \cap \alpha = \{O\}$, $a \subset \alpha$ cu $O \in a$, $b \subset \alpha$, $a \perp b$, $a \cap b = \{P\}$, $M \in d$.

Concluzia: $MP \perp b$.

Cele trei perpendiculare din denumire sunt: $d \perp \alpha$, $a \perp b$ și concluzia $MP \perp b$. Prima e dată, a doua se construiește în plan, a treia rezultă.

4. Reciprocele teoremei

Ambele reciproce sunt **adevărate** și se folosesc la fel de des ca teorema directă. Se schimbă doar ce e ipoteză și ce e concluzie.

Reciproca I

Dacă $d \perp a$, $d \cap a = \{O\}$, $a \subset \alpha$ cu $O \in a$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = \{P\}$,
 $M \in d$ și $MP \perp b$, atunci $a \perp b$.

La ce folosește: arată că **două drepte din plan** sunt perpendiculare, pornind de la o perpendicularitate din spațiu.

Reciproca a II-a

Dacă $d \perp a$, $d \cap a = \{O\}$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \perp b$, $a \cap b = \{P\}$,
 $M \in d$ și $MP \perp b$, atunci $d \perp \alpha$.

La ce folosește: demonstrează că o dreaptă e **perpendiculară pe un plan** — deci că un segment este chiar **distanța** de la un punct la acel plan.

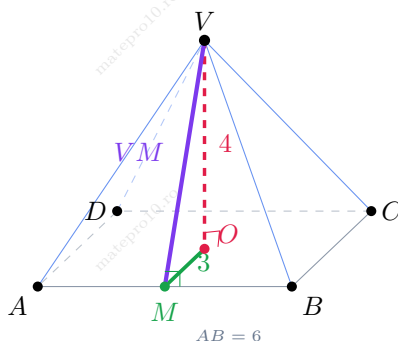
Cum le ții minte: în toate trei apar aceleași elemente, diferă doar concluzia. Teorema directă $\rightarrow MP \perp b$. Reciproca I $\rightarrow a \perp b$. Reciproca a II-a $\rightarrow d \perp \alpha$.

Aplicația cea mai frecventă: distanța de la un punct la o dreaptă în spațiu. Segmentul MP este chiar acea distanță, iar lungimea lui se calculează cu Pitagora în triunghiul dreptunghic MOP :

$$MP = \sqrt{MO^2 + OP^2}$$

5. Calculul distanțelor în corpuri

Problemă. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are latura bazei $AB = 6$ cm și înălțimea $VO = 4$ cm. Află distanța de la vârful V la latura AB .



Pasul 1. Fie M mijlocul lui AB . În baza pătrată, $OM \perp AB$, iar $OM = \frac{AB}{2} = 3$ cm.

Pasul 2. $VO \perp (ABCD)$, iar $OM \perp AB$. După **teorema celor trei perpendiculare**, rezultă $VM \perp AB$.

Pasul 3. Deci VM este chiar distanța cerută. În triunghiul dreptunghic VOM :

$$VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Segmentul VM se numește **apotema piramidei**. Îl vei folosi la calculul ariei laterale — deci merită reținut cum se află.

Aceeași piramidă, muchia laterală: OA este jumătate din diagonala bazei, deci $OA = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$. Atunci $VA = \sqrt{4^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 18} = \sqrt{34}$ cm.

Atenție: apotema și muchia laterală **nu** sunt același lucru — se calculează din triunghiuri diferite.

De reținut

Unghiul a două plane se măsoară ducând, dintr-un **același punct** de pe muchie, câte o perpendiculară pe muchie în fiecare față.

Teorema celor trei perpendiculare transformă o problemă de spațiu într-un triunghi dreptunghic. E cea mai folosită unealtă din tot capitolul.

Distanța de la un punct la o dreaptă se obține cu Pitagora, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$, după ce ai identificat corect cele două catete.