

Aree și volume — poliedre (I)

Cubul · paralelipipedul · prisma · Clasa a VIII-a

Toate formulele de aici se deduc din **desfășurarea** corpului. Aria laterală e suma fețelor laterale, aria totală adaugă bazele, iar volumul e **aria bazei înmulțită cu înălțimea**.

1. Cubul

Cubul de muchie ℓ

$$\mathcal{A}_\ell = 4\ell^2 \quad \mathcal{A}_t = 6\ell^2 \quad V = \ell^3$$

Cubul are **6 fețe** pătrate identice: patru laterale și două baze.

Diagonalele cubului

$$\text{diagonala unei fețe: } d = \ell\sqrt{2} \quad \text{diagonala cubului: } D = \ell\sqrt{3}$$

De unde vin: diagonala feței iese din Pitagora într-un pătrat, $d = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{2}$; diagonala cubului, din triunghiul format de o muchie și diagonala feței, $D = \sqrt{\ell^2 + 2\ell^2} = \ell\sqrt{3}$.

Exemplu. Cub cu $\ell = 4$ cm: $\mathcal{A}_t = 6 \cdot 16 = 96$ cm², $V = 64$ cm³, $D = 4\sqrt{3}$ cm.

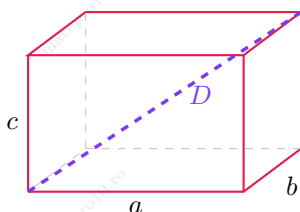
2. Paralelipipedul dreptunghic

Paralelipipedul de dimensiuni a, b, c

$$\mathcal{A}_\ell = 2c(a + b) \quad \mathcal{A}_t = 2(ab + bc + ca) \quad V = abc$$

$$\text{diagonala: } D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

a și b sunt dimensiunile bazei, iar c este **înălțimea**. Aria bazei este ab , perimetrul $2(a + b)$, deci $\mathcal{A}_\ell = 2(a + b) \cdot c$.



Exemplu. $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ cm:

$$\mathcal{A}_\ell = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 \quad \mathcal{A}_t = 2(12 + 20 + 15) = 94 \quad V = 60 \quad D = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

3. Prisma dreaptă — formulele generale

Prisma dreaptă, cu $\mathcal{A}_b$ aria bazei, P_b perimetrul bazei și h înălțimea

$$\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + 2\mathcal{A}_b \quad V = \mathcal{A}_b \cdot h$$

De ce $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h$: desfășurată, suprafața laterală este un **dreptunghi** cu laturile P_b și h .

Ariile bazelor, pentru prisme regulate de latură ℓ :

triunghi echilateral: $\mathcal{A}_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$ pătrat: $\mathcal{A}_b = \ell^2$ hexagon regulat: $\mathcal{A}_b = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

Hexagonul regulat se împarte în **șase triunghiuri echilaterale** cu aceeași latură, de unde $6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$.

4. Problemă rezolvată

Prismă triunghiulară regulată cu latura bazei 6 cm și înălțimea 10 cm. Află aria laterală, aria totală și volumul.

Aria bazei: $\mathcal{A}_b = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Perimetrul bazei: $P_b = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}$

$\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 18 \cdot 10 = 180 \text{ cm}^2$

$\mathcal{A}_t = 180 + 2 \cdot 9\sqrt{3} = 180 + 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$

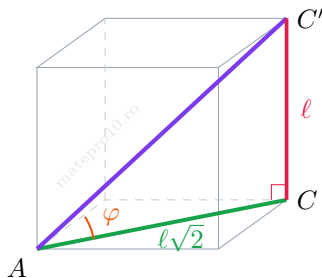
$V = \mathcal{A}_b \cdot h = 9\sqrt{3} \cdot 10 = 90\sqrt{3} \text{ cm}^3$

Atenție la unități: lungimile în cm, ariile în cm^2 , volumele în cm^3 . E cea mai ușoară greșală de evitat și una dintre cele mai frecvente la examen.

5. Unghiuri și distanțe în interiorul corpurilor

Multe probleme cer un **unghi** sau o **distanță** în interiorul corpului. Metoda e mereu aceeași: **identifici un triunghi dreptunghic** și aplici Pitagora sau rapoartele trigonometrice.

Exemplu. În cubul de muchie ℓ , ce unghi face diagonală cubului cu planul bazei?



Diagonala cubului este AC' , iar proiecția ei pe bază este diagonala feței $AC = \ell\sqrt{2}$. Triunghiul ACC' e dreptunghic în C , cu cateta $CC' = \ell$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{CC'}{AC} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Unghiul nu depinde de ℓ — e același la orice cub.

De reținut

Volumul oricărei prisme este $\mathcal{A}_b \cdot h$, iar aria laterală este $P_b \cdot h$. Restul e doar calculul ariei bazei.

Diagonala cubului e $\ell\sqrt{3}$, a feței e $\ell\sqrt{2}$ — se confundă des.

Pentru unghiuri și distanțe în interiorul corpului, caută mereu **triunghiul dreptunghic** potrivit.