

Arie și volume — poliedre (II)

Piramida regulată · trunchiul de piramidă · Clasa a VIII-a

La piramidă apare o mărime nouă: **apotema piramidei**, adică înălțimea unei fețe laterale. Fără ea nu se poate calcula aria laterală, și tot ea e cea care se confundă cel mai des cu muchia laterală.

1. Cele trei mărimi care se confundă

Înălțimea piramidei h — de la vârf la centrul bazei, perpendiculară pe bază.

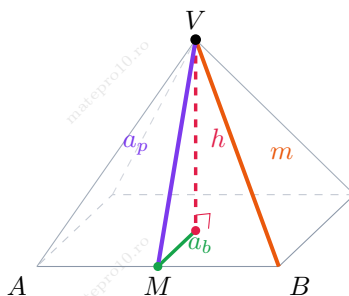
Apotema piramidei a_p — de la vârf la mijlocul unei laturi a bazei. E înălțimea feței laterale.

Muchia laterală m — de la vârf la un vârf al bazei.

Relațiile dintre ele, prin Pitagora

$$a_p^2 = h^2 + a_b^2 \qquad m^2 = h^2 + R^2$$

unde a_b = apotema bazei, R = raza cercului circumscris bazei



Apotema bazei și raza circumscrisă, pentru poligoane regulate de latură ℓ :

	apotema a_b	raza R
triunghi echilateral	$\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$
pătrat	$\frac{\ell}{2}$	$\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$
hexagon regulat	$\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$	ℓ

2. Formulele piramidei regulate

Piramida regulată

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{P_b \cdot a_p}{2} \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_b \quad V = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$$

De unde vine aria laterală: fețele sunt triunghiuri isoscele identice, fiecare cu baza ℓ și înălțimea a_p . Suma ariilor lor este $n \cdot \frac{\ell \cdot a_p}{2} = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$.

De ce se împarte la 3 la volum: o piramidă are **a treia parte** din volumul prisme cu aceeași bază și aceeași înălțime. La prismă era $\mathcal{A}_b \cdot h$, aici e $\frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3}$.

3. Problemă rezolvată

Piramidă patrulateră regulată cu latura bazei 6 cm și înălțimea 4 cm.

$$\mathcal{A}_b = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$$

$$P_b = 4 \cdot 6 = 24 \text{ cm}$$

$$a_b = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$a_p = \sqrt{h^2 + a_b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \text{ cm}$$

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{24 \cdot 5}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

$$\mathcal{A}_t = 60 + 36 = 96 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{36 \cdot 4}{3} = 48 \text{ cm}^3$$

Verificare: cele patru fețe sunt triunghiuri cu baza 6 și înălțimea 5, deci fiecare are aria $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15 \text{ cm}^2$. În total $4 \cdot 15 = 60 \text{ cm}^2$ — coincide cu $\mathcal{A}_\ell$. ✓

Muchia laterală e altceva: $R = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$, deci $m = \sqrt{16 + 18} = \sqrt{34} \text{ cm}$. **Nu** e egală cu apotema, care era 5.

4. Trunchiul de piramidă regulată

Se obține tăind vârful piramidei cu un plan paralel cu baza. Are **două baze** asemenea, iar fețele laterale sunt **trapeze isoscele**. **Apotema trunchiului** este înălțimea unui astfel de trapez.

Trunchiul de piramidă regulată

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{(P_B + P_b) \cdot a_t}{2} \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b$$

$$V = \frac{h}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b})$$

Apotema trunchiului se află tot cu Pitagora, din diferența apotemelor celor două baze:

$$a_t = \sqrt{h^2 + (a_B - a_b)^2}$$

Exemplu. Trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor 8 cm și 4 cm, înălțimea 3 cm.

$$\mathcal{A}_B = 64, \mathcal{A}_b = 16, P_B = 32, P_b = 16$$

$$\text{Apotemele bazelor: } a_B = 4, a_b = 2, \text{ deci } a_t = \sqrt{9 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13} \text{ cm}$$

$$\mathcal{A}_t = \frac{(32 + 16)\sqrt{13}}{2} = 24\sqrt{13} \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{3}{3} (64 + 16 + \sqrt{64 \cdot 16}) = 64 + 16 + 32 = 112 \text{ cm}^3$$

La volumul trunchiului nu se scad volumele! Formula are trei termeni, iar cel din mijloc, $\sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}$, este **media geometrică** a ariilor bazelor. Se uită des.

De reținut

Apotema piramidei merge la **mijlocul** laturii, **muchia laterală** la **vârful** ei. Se calculează din triunghiuri diferite.

La piramidă, volumul se **împarte la 3**. La prismă, nu.

La trunchi, volumul are **trei** termeni, iar al treilea e rădăcina produsului ariilor bazelor.