

Arii și volume — corpuri rotunde

Cilindrul · conul · trunchiul · sfera · Clasa a VIII-a

Corpurile rotunde se obțin prin **rotația** unei figuri plane. Formulele urmează același tipar ca la poliedre — aria laterală din desfășurare, volumul din aria bazei înmulțită cu înălțimea — doar că bazele sunt **cercuri**.

1. Cilindrul circular drept

Cilindrul de rază R și înălțime h

$$\mathcal{A}_\ell = 2\pi R h \quad \mathcal{A}_t = 2\pi R(R + h) \quad V = \pi R^2 h$$

De unde vine aria laterală: desfășurată, suprafața laterală e un **dreptunghi** cu lungimea egală cu circumferința bazei, $2\pi R$, și lățimea h .

Aria totală adaugă cele două cercuri: $\mathcal{A}_t = 2\pi R h + 2\pi R^2$, care se scrie mai scurt $2\pi R(R + h)$.

Secțiunea axială — tăietura printr-un plan care conține axa — este un **dreptunghi** cu dimensiunile $2R$ și h .

Secțiunea paralelă cu baza este un **cerc** de aceeași rază R .

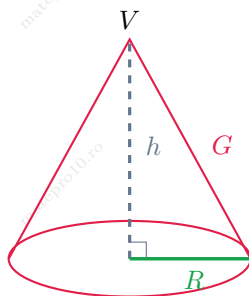
Exemplu. $R = 3$, $h = 5$: $\mathcal{A}_\ell = 30\pi$, $\mathcal{A}_t = 48\pi$, $V = 45\pi$.

2. Conul circular drept

Conul de rază R , înălțime h și generatoare G

$$G^2 = R^2 + h^2$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi R G \quad \mathcal{A}_t = \pi R(R + G) \quad V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$



Generatoarea G este segmentul de la vârf la un punct de pe cercul bazei. Împreună cu R și h formează un **triunghi dreptunghic**, de unde $G^2 = R^2 + h^2$.

Atenție: în formula ariei laterale intră G , nu h . E greșeala cea mai frecventă la con.

Secțiunea axială este un **triunghi isoscel** cu baza $2R$, înălțimea h și laturile egale cu G . **Desfășurarea** suprafeței laterale este un **sector de cerc** de rază G .

Exemplu. $R = 3, h = 4$: $G = \sqrt{9 + 16} = 5$, deci $\mathcal{A}_\ell = 15\pi$, $\mathcal{A}_t = 24\pi$, $V = 12\pi$.

Ca la piramidă, volumul conului se **împarte la 3**: conul are a treia parte din volumul cilindrului cu aceeași bază și aceeași înălțime.

3. Trunchiul de con

Trunchiul de con cu razele R și r , înălțimea h

$$G^2 = h^2 + (R - r)^2$$

$$\mathcal{A}_\ell = \pi G(R + r) \quad \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_\ell + \pi R^2 + \pi r^2$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$$

Generatoarea se află din triunghiul dreptunghic format de înălțime și **diferența razelor**, nu de razele întregi.

Exemplu. $R = 6, r = 3, h = 4$:

$$G = \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \mathcal{A}_\ell = 5\pi \cdot 9 = 45\pi \quad V = \frac{4\pi}{3} (36 + 9 + 18) = 84\pi$$

Aceeași structură ca la trunchiul de piramidă: volumul are **trei** termeni, iar cel din mijloc, Rr , este **media geometrică** a razelor la pătrat. Nu se scad volumele.

4. Sfera

Sfera de rază R

$$\mathcal{A} = 4\pi R^2 \quad V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Sfera nu are baze, nu are generatoare și nu are desfășurare plană — de aceea are o singură arie, nu laterală și totală.

Orice secțiune cu un plan este un **cerc**. Secțiunea prin centru se numește **cerc mare** și are chiar raza R .

Exemplu. $R = 6$: $\mathcal{A} = 4\pi \cdot 36 = 144\pi$, $V = \frac{4\pi \cdot 216}{3} = 288\pi$.

Aria sferei este exact cât aria a **patru cercuri mari** — $4\pi R^2 = 4 \cdot \pi R^2$. E un mod ușor de a o ține minte.

5. Tabel recapitativ

Corp	Aria laterală	Volumul
cilindru	$2\pi Rh$	$\pi R^2 h$
con	πRG	$\frac{\pi R^2 h}{3}$
trunchi de con	$\pi G(R + r)$	$\frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$
sferă	—	$\frac{4\pi R^3}{3}$

De reținut

La **con** intră **generatoarea** în aria laterală, nu înălțimea. La **trunchi**, generatoarea se află din **diferența razelor**.

Volumele se împart la 3 la con și la trunchiul de con, ca la piramidă. La cilindru, nu.

Sfera are o singură arie, $4\pi R^2$, și volumul $\frac{4\pi R^3}{3}$.