

Mulțimi de numere reale. Intervale

Operații cu intervale · inecuații · Clasa a VIII-a

Un **interval** este o mulțime de numere reale care conține **toate** numerele dintre două capete. Nu se poate scrie prin enumerare — între 1 și 2 există o infinitate de numere reale — de aceea are notație proprie.

1. Mulțimi definite printr-o proprietate

Când o mulțime are prea multe elemente ca să le scrii pe toate, o definești printr-o **proprietate** pe care elementele o îndeplinesc.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$ — mulțimea numerelor reale mai mari sau egale cu 2 și strict mai mici decât 5.

Se citește: „mulțimea numerelor reale x **cu proprietatea că** $2 \leq x < 5$ ”. Aceeași mulțime se scrie mai scurt ca interval: $[2, 5)$.

2. Tipurile de intervale

Un capăt este **inclus** dacă numărul **face parte** din interval și **exclus** dacă nu face parte. Paranteza dreaptă marchează un capăt inclus, cea rotundă unul exclus. Intervalul se numește **închis** la capătul inclus și **deschis** la cel exclus.

Notăție	Ce conține	Capete
$[a, b]$	toate x cu $a \leq x \leq b$	ambele incluse
(a, b)	toate x cu $a < x < b$	ambele excluse
$[a, b)$	toate x cu $a \leq x < b$	a inclus, b exclus
$(a, b]$	toate x cu $a < x \leq b$	a exclus, b inclus

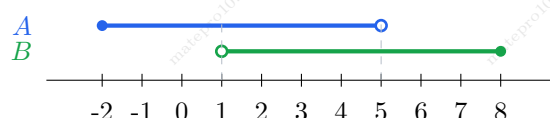


Intervale nemărginite — au un singur capăt, iar în cealaltă parte merg la infinit. La ∞ paranteza este **întotdeauna rotundă**, pentru că infinitul nu e un număr și nu poate face parte din mulțime.

$[a, +\infty)$ $(a, +\infty)$ $(-\infty, b]$ $(-\infty, b)$ $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

3. Operații cu intervale

Se lucrează **pe axă**. Desenezi ambele intervale unul sub altul și citești rezultatul. Fie $A = [-2, 5)$ și $B = (1, 8]$.



Reuniunea $A \cup B$ — tot ce e acoperit de măcar unul: $[-2, 8]$

Intersecția $A \cap B$ — doar zona acoperită de amândouă: $(1, 5)$

Diferența $A \setminus B$ — ce e în A dar nu în B : $[-2, 1]$

Diferența $B \setminus A$ — ce e în B dar nu în A : $[5, 8]$

Atenție la capete. La $A \setminus B$, numărul 1 **rămâne** în rezultat, pentru că B începe strict după 1 — deci 1 nu aparține lui B . La fel, 5 intră în $B \setminus A$, pentru că A se oprește înainte de 5.

Capătul **exclus** al unuia devine capăt **inclus** al diferenței.

4. Inecuații: regula care schimbă totul

O **inecuație** se rezolvă ca o ecuație, cu o **singură** diferență esențială.

Când **înmulțești** sau **împarți** ambele părți cu un **număr negativ**, sensul inegalității se **inversează**.

$$-3 < 2 \quad \xrightarrow{\cdot(-2)} \quad 6 > -4$$

Dacă nu inversezi, ai obține $6 < -4$, ceea ce e fals.

Adunarea și scăderea **nu** schimbă sensul, indiferent de semn. Înmulțirea și împărțirea cu un număr **pozitiv** nu îl schimbă.

5. Rezolvarea inecuațiilor

Soluția se scrie **ca interval**.

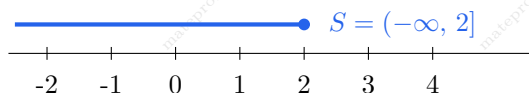
Exemplul 1. $3x - 6 > 0 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2$

$$S = (2, +\infty)$$

Exemplul 2. $-2x + 4 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -4$

Împărțim la -2 , deci **inversăm** semnul: $x \leq 2$

$$S = (-\infty, 2]$$



Exemplul 3 — cu fracții. $\frac{2x-1}{3} < \frac{x+2}{2}$

Înmulțim tot cu 6, numitorul comun. 6 e **pozitiv**, deci semnul rămâne:

$$2(2x-1) < 3(x+2) \Rightarrow 4x-2 < 3x+6 \Rightarrow x < 8$$

$$S = (-\infty, 8)$$

Verifică întotdeauna cu un număr din interval și cu unul din afară. La exemplul 3: $x = 7$ dă $\frac{13}{3} < \frac{9}{2}$, adevărat. $x = 9$ dă $\frac{17}{3} < \frac{11}{2}$, fals. ✓

6. Aceeași inecuație, trei mulțimi diferite

Răspunsul depinde de mulțimea în care căutăm soluția. Aceeași rezolvare duce la trei mulțimi de soluții complet diferite, după cum se cere $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Z}$ sau $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvarea e aceeași în toate cazurile:

$$2x - 6 < 4 \quad \Rightarrow \quad 2x < 10 \quad \Rightarrow \quad x < 5$$

De aici încolo, răspunsul se schimbă.

În $\mathbb{N}$

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Mulțime **finită**, cu 5 elemente. Le pot scrie pe toate.

În $\mathbb{Z}$

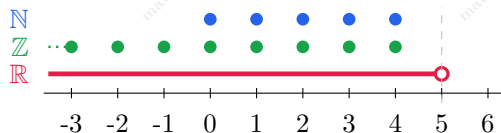
$$S = \{\dots, 2, 3, 4\}$$

Infinită spre stânga. Le pot enumera, dar nu termin niciodată.

În $\mathbb{R}$

$$S = (-\infty, 5)$$

Interval. Nu pot enumera nimic — de aceea există notația.



Observă că **în toate trei**, numărul 5 este exclus — condiția e $x < 5$, nu $x \leq 5$. Ce se schimbă nu e condiția, ci **din ce numere avem voie să alegem**.

Și la ecuații se întâmplă la fel. Ecuația $2x = 7$ are soluția $x = \frac{7}{2} = 3,5$.

În $\mathbb{N}$: **nu are soluție.**

În $\mathbb{Z}$: **nu are soluție.**

$$\text{În } \mathbb{R}: S = \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

3,5 există ca număr, dar nu este nici natural, nici întreg. Dacă mulțimea în care căutăm nu-l conține, ecuația rămâne fără soluție.

Citește întotdeauna enunțul până la capăt. „Aflați $x \in \mathbb{N}$ ” și „Aflați $x \in \mathbb{R}$ ” cer răspunsuri diferite pentru **exact aceeași** inecuație. E una dintre cele mai frecvente pierderi de punct.

De reținut

Paranteza **dreaptă** marchează un capăt **inclus**, cea **rotundă** unul **exclus**. La ∞ paranteza e mereu rotundă.

Operațiile cu intervale se citesc **de pe axă**, nu se ghicesc.

Înmulțirea sau împărțirea cu un număr negativ inversează sensul inecuației. E singura regulă care deosebește inecuațiile de ecuații — și singura care se uită.

Aceeași inecuație are răspunsuri diferite în $\mathbb{N}$, în $\mathbb{Z}$ și în $\mathbb{R}$. **Verifică mereu în ce mulțime se cere soluția.**